den sind, wie sie fast stets in mehr divinatorischer Gestalt auftauchen und erst in langer Entwicklung die starre und auskrystallisierte Form der systematischen Darstellung annehmen! Möge diese Erkenntnis einst — mit diesem Wunsche möchte ich meine Vorlesung schliessen — nachhaltigen Einfluss auf die Gestaltung Ihres eignen Unterrichts an der Schule gewinnen!

natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustand zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat! Es ist nötig, diese Forderung immer wieder zu stellen, denn stets wieder gibt es Leute, die nach Art der mittelalterlichen Scholastiker ihren Unterricht mit den allgemeinsten Ideeen beginnen, und diese Methode als die allein wissenschaftliche rechtfertigen wollen. Und doch ist auch diese Begründung nicht wahr: *Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen.*

Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der *Mangel an historischen Kenntnissen*, der so vielfach sich geltend macht. Um ihn zu bekämpfen, habe ich besonders gern zahlreiche *historische Momente* in meine Darstellung verflochten. Lernen Sie daraus, wie langsam alle mathematischen Ideeen erst entstandung des Kontinuums ermöglicht sei.

Wir können natürlich von unserm mathematisch-pädagogischen Standpunkte aus die durch dieses Buch besonders charakteristisch vertretene Richtung nicht billigen. Es mag wohl möglich sein, daß ein so tüchtiger Mann wie F. Meyer in seiner Weise einmal einen mathematisch besonders veranlagten jungen Mann sehr fördern und anregen kann, aber – wenn anders es der Zweck des Schulunterrichts ist, nicht nur solche besondere Talente auszubilden, sondern den Durchschnitt wesentlich zu fördern – *so kann es meiner Meinung nach nichts Unzweckmäßigeres geben, als ein solches abstraktes systematisches Verfahren.*

Ich möchte hier, um meine Ansicht hierüber zu präzisieren, *das biogenetische Grundgesetz* heranziehen, daß das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft; solche Gedanken sind ja heute nachgerade Bestandteile der allgemeinen Bildung eines jeden geworden. Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht, wie jeder Unterricht überhaupt, im allgemeinen wenigstens befolgen: *Er sollte, an die* dem Cantor mit seiner Theorie hervortrat, schrieb ein Freund von ihm, Friedrich Meyer, – übrigens ein hervorragender Mathematiker – ein Schulbuch: Elemente der Arithmetik und Algebra.[1] Hier wird in der Tat der Versuch gemacht den arithmetisch-algebraischen Lehrstoff der Schule von Beginn an unter Voranstellung der Mengenlehre systematisch zu ordnen: Auf pag. 1. wird mit der allgemeinen Idee der Mächtigkeit einer Menge begonnen, auf Seite 6 wird das Symbol ω für die Mächtigkeit der abzählbar unendlichen Menge (1, 2, 3 . . .) eingeführt, und auf S. 21. endlich ist der Verfasser in seiner Deduktion bis zur Tabelle des kleinen Einmaleins gelangt! Im übrigen ist in dem Buche eine ungeheure Menge Stoff enthalten, aber ganz entgegengesetzt den Reformvorschlägen die ich hier immer befürworte. Von Infinitesimalrechnung findet sich natürlich keine Spur, aber auch die Raumanschauung und überhaupt „genetische" Methoden kommen durchaus nicht zu ihrem Recht. Vielmehr findet sich in der Vorrede der charakteristische Ausspruch, daß die Analysis und Arithmetik jetzt „der Krücken der Geometrie nicht mehr bedürfe," nachdem durch die Mengenlehre eine rein logische Begrün-

1.) 2. Aufl. Halle 1885.

lich induktiv durchgearbeitet hat wie der Autor.

Was *Literatur über die Mengenlehre* angeht, so habe ich vor allem auf den der deutschen Mathematikervereinigung erstatteten Bericht von *A. Schoenflies: „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten"*[1], zu verweisen; der erste Teil erschien im Band VIII der Jahresberichte der D. M. V., während der zweite erst kürzlich – in der Form eines zweiten Ergänzungsbandes zu den Jahresberichten – erschienen ist. Dies Buch ist tatsächlich ein Referat über die gesamte Mengenlehre, in dem Sie über zahlreiche Einzelheiten Bescheid finden können.

Zum Schluß dieser Betrachtungen über Mengenlehre haben wir nun wieder die Frage zu stellen, mit der wir unser ganzes Kolleg begleiteten: *Was kann man davon auf der Schule gebrauchen?* Man sollte diese Frage für überflüssig halten, denn eigentlich muß doch jeder Mensch zugeben, daß man den Schüler mit so abstrakten und schwierigen Dingen nicht so bald kommen dürfe. Aber diese Erkenntnis herrscht nicht so allgemein, wofür ich nur ein Beispiel anführen will. Bald nach-

1) 2. Teile. Leipzig 1900 und 1908.

spezielle Axiomatik zu den allgemeinen Anordnungseigenschaften hinzutreten müssen. Das bedeutet also eine weitere Entwicklung der Lehre von den einfach, zweifach ... geordneten kontinuierlichen Mengen.

Es kann nicht meine Absicht sein, hier näher auf diese Dinge einzugehen, die in dem geometrischen Kolleg des nächsten Semesters ohnehin behandelt werden müssen. Nur *Literatur* will ich noch nennen, in der Sie sich etwas informieren können, und da kommen natürlich vor allem die einschlägigen *Referate der mathematischen Encyklopädie* in Betracht: *Enriques, Prinzipien der Geometrie* (III A B. 1) und *v. Mangoldt, die Begriffe „Linie" und „Fläche"* (III A B. 2) für die spezielle Axiomatik, sowie *Dehn – Heegaard, Analysis situs* (III A B 3). Der letztere Artikel ist recht abstrakt geschrieben; er beginnt mit den allgemeinsten, von Dehn selbst aufgestellten Formulierungen der Begriffe und Grundtatsachen der Analysis situs, aus denen dann alles andere rein logisch deduziert wird. Das steht ganz im Gegensatz zu der induktiven Darstellungsmethode, die ich immer empfehle; es setzt, soll es voll verstanden werden, eigentlich einen sehr hoch stehenden Leser voraus, der das Gebiet schon so gründauf die Geometrie übertragen gibt das aber überhaupt die seit *Riemann Analysis situs* genannte Disziplin, jenes abstrakteste Kapitel der Geometrie, das nur die bei allgemeinsten stetigen eineindeutigen Abbildungen invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde behandelt. Uebrigens hat schon Riemann das Wort *Mannigfaltigkeit* in einem sehr allgemeinen Sinne gebraucht; dies Wort benutzt auch Cantor zuerst, und ersetzt es erst später durch das kürzere und daher bequemere Wort „Menge", das ja auf denselben Sprachstamm zurückgeht. Heut ist das Wort „Menge" so eingebürgert, daß jeder für ganz unmodern gilt, der noch „Mannigfaltigkeit" sagt.

2) Wollen wir nun weiter zur *konkreten Geometrie* übergehen, so kommen Unterschiede wie zwischen *metrischer und projektiver Geometrie* herein. Hier genügt es nicht zu wissen, daß etwa die Gerade eindimensional, die Ebene zweidimensional ist, sondern man wird *Figuren konstruieren oder vergleichen* wollen und etwa über einen festen *Maßstab* verfügen oder doch wenigstens *Gerade in der Ebene*, *Ebenen im Raume* legen wollen. Für jedes dieser konkreten Gebiete wird natürlich eine

So haben wir es auch in dieser Vorlesung in der Hauptsache gehalten.

Dieser einseitigen Bevorzugung der ganzen Zahlen gegenüber will nun Cantor – wie er mir selbst gelegentlich bei der Naturforscherversammlung in Cassel 1903 sagte – geradezu die *„wahre Fusion von Arithmetik und Geometrie"* in der *Mengenlehre* erreichen, d.h. die Lehre von den ganzen Zahlen einerseits ebenso wie die Theorie der verschiedenen Punktkontinua andererseits und noch vieles andere zu nebeneinander stehenden gleichberechtigten Kapiteln einer allgemeinen Lehre von den Mengen machen.

Noch einiges Allgemeine über die *Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie* will ich hier anfügen: Wir hatten in der Mengenlehre betrachtet

1.) die *Mächtigkeit der Mengen* als das, was bei jeder eineindeutigen Abbildung erhalten bleibt.

2.) die *Anordnungstypen der Mengen*, die die Ordnungsbeziehungen der Elemente berücksichtigen. Hier konnten wir den *Stetigkeitsbegriff*, die verschiedenen mehrfachen Anordnungen oder *verschiedendimensionale Kontinua* u. dgl. charakterisieren, und es gehören hier schließlich überhaupt die *Invarianten stetiger Abbildungen* hin.

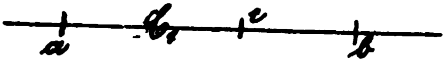
als *Kurve* ansprechen kann.

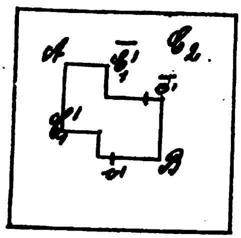
Ich schließe damit die speziellen Erörterungen über Mengenlehre, um noch *einige allgemeine Bemerkungen* anzufügen. Zunächst will ich von den Ideen erzählen, die *Cantor über die Stellung der Mengenlehre zur Geometrie und Analysis* sich gebildet hat; sie rücken deren Bedeutung in ein besonderes Licht. Durch die ganze Geschichte der Mathematik wie auch durch alle philosophischen Spekulationen über ihr Wesen zieht sich bekanntlich der Unterschied zwischen der *diskreten Größe der Arithmetik* und der *kontinuierlichen, stetigen der Geometrie*. *Neuerdings ist die diskrete Größe als am einfachsten begreiflich besonders in den Vordergrund gerückt worden*, indem man die ganzen natürlichen Zahlen als gegebene einfachste Begriffe ansah, von ihnen aus in bekannter Weise die rationalen und irrationalen Zahlen herleitete, und so schließlich den ganzen Apparat zur Beherrschung der Geometrie durch die Analysis, die analytische Geometrie, gewann; man kann die Tendenz dieser modernen Entwicklung als die einer *Arithmetisierung der Geometrie* bezeichnen: *die geometrische Stetigkeitsidee wird auf die Idee der ganzen Zahlen zurückgeführt.*

jedem Elemente von C_1' oder $\bar{C}_1'$ genau ein Punkt auf C_1, jedem Elemente von C_1 aber höchstens einer auf C_1' oder $\bar{C}_1'$ entsprechen. Also sind die Voraussetzungen unseres Lemma genau gegeben, und es folgt, *dass jedem Punkte c in C_1 zwischen a und b sowohl ein Punkt c' auf C_1', als auch ein Punkt $\bar{c}'$ auf C_1' entsprechen muss* — was aber der vorausgesetzten Eineindeutigkeit der zwischen C_1 und C_2 bestehenden Abbildung widerspricht. *Also kann diese Abbildung nicht möglich sein, und der Beweis ist geführt.*

Will man nun diesen Beweis auf 2 beliebige Kontinua C_m, C_n übertragen, so muss man vorher genau wissen, wie denn die einer C_m eingelagerten Kontinua von $1, 2, 3 \ldots m-1$ Dimensionen allgemeinster Natur beschaffen sein können; sowie $m, n \geq 2$ ist, kommt man da nicht mehr mit der Verwendung des Begriffes zwischen aus, wie soeben im einfachsten Falle. Das werden dann äusserst schwierige Untersuchungen, die noch als erste Fälle die schon sehr schwierigen, erst in neuester Zeit etwas geklärten, *für die Geometrie fundamentalen Fragen nach den allgemeinsten stetigen eindimensionalen Punktmengen in der Ebene* umfassen — insbesondere, wann man diese die Stetigkeit einer Abbildung stetiger Mengen durchaus analog zur bekannten Definition der Stetigkeit einer Funktion definiert, was allein auf Grund der Anordnungsbegriffes gelingt. Es ist hier nicht der Ort, diese Andeutungen weiter auszuführen.

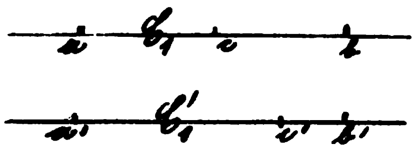
Nun führen wir unsern Beweis so: Es sei





die eindimensionale Strecke C_1 und das Quadrat C_2 eineindeutig und stetig aufeinander bezogen. Zwei Elementen a, b auf C_1 mögen dabei die Elemente A, B von C_2 entsprechen. Wir können nun diese A, B innerhalb der Menge C_2 durch 2 voneinander verschiedene Wege verbinden, z. B. die gezeichneten Treppenwege C_1', $\bar{C}_1'$. Dabei brauchen wir keinerlei spezielle Eigenschaften des C_2, wie eine Koordinatenbestimmung u. dgl. vorauszusetzen, sondern müssen lediglich den Begriff der doppelten Ordnung des C_2 benutzen. Dann wird aber jedenfalls sowohl C_1' als $\bar{C}_1'$ ein einfach geordneter eindimensionales Kontinuum genau wie C_1, und in Folge der vorausgesetzten eineindeutigen stetigen Beziehung zwischen C_1 und C_2 muß-allgemeinsten Fall entgegenstehen. Wir beweisen also, daß eine eineindeutige, stetige Beziehung zwischen dem C_1 und dem C_2 nicht möglich ist; dabei ist jedes Wort wesentlich: daß wir die Stetigkeit nicht weglassen dürfen, wissen wir ja, aber daß auch die Eineindeutigkeit nicht wegbleiben darf, lehrt das Beispiel der manchem gewiß bekannten „Peanokurve".

Zunächst ein Hilfssatz: Zwei eindimensionale Kontinua C_1, C_1' mögen stetig aufeinander abgebildet sein, derart daß jedem Elemente von C_1' sicher ein und nur ein Element von C_1 und jedem Elemente von C_1 höchstens ein Element von C_1' entspricht; sind dann a, b 2 Elemente auf C_1, denen in C_1' tatsächlich 2 Elemente a', b' bez. entsprechen, so entspricht auch jedem zwischen a, b, gelegenen Elemente c von C_1 wirklich ein Element c' von C_1', das zwischen a', b' liegt.



Diese Behauptung entspricht dem bekannten Satze, daß eine stetige Funktion $f(x)$, die in einem Intervall der stetigen Veränderlichen x ihr Vorzeichen wechselt, irgendwo daselbst verschwinden muß; sie kann tatsächlich in genauer Verallgemeinerung dieses Satzes allein aus dem oben definierten Stetigkeitsbegriff bewiesen werden, wenn man auch noch typus als das gewöhnliche C_1; schon der Satz, daß jede Fundamentalreihe ein Grenzelement hat, besteht da nicht mehr.

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage, welche Abbildungen denn den Unterschied der verschieden-dimensionalen Kontinua $C_1, C_2 \dots$ erhalten; wir wissen ja, daß die allgemeinste eineindeutige Abbildung hier jeden Unterschied verwischt. Da besteht nun der wichtige Satz, daß die Dimensionalzahl des Kontinuums invariant ist gegenüber allen eineindeutigen und stetigen Abbildungen, d. h. daß es unmöglich ist ein C_m und C_n für $m \neq n$ eineindeutig und stetig aufeinander abzubilden. Man würde geneigt sein, diesen Satz ohne weiteres als selbstverständlich hinzunehmen, aber wir müssen uns erinnern, daß die naive Anschauung auch die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung des C_2 auf das C_1 überhaupt auszuschließen schien, und sehen uns so zur Vorsicht gegenüber ihren Aussagen veranlaßt.

Ich will hier nur den einfachsten Fall näher behandeln, wo es sich um die Beziehung der ein- und zweidimensionalen Kontinuums handelt, und werde dann nur kurz andeuten, welche Schwierigkeiten der Ausdehnung des Beweises auf den

Menge jedes dem folgenden vorangeht oder auch jedes dem nächsten nachfolgt:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots \quad \text{oder} \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots .$$

Ein Element a der Menge heißt nun *Grenzelement der Fundamentalreihe, wenn – bei der ersten Art – zwar jedes vor a gelegene Element schließlich von Elementen der Fundamentalreihe überschritten wird, aber kein hinter a gelegenes Element*; analog ist es bei der zweiten Art. Hat nun in einer Menge jede Fundamentalreihe ein Grenzelement, so heißt sie *abgeschlossen*; ist umgekehrt jedes Element Grenzelement einer Fundamentalreihe, so heißt sie *in sich dicht*. Die Stetigkeit bei Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums besteht nun wesentlich in der Vereinigung dieser beiden Eigenschaften.

Ich erinnere hier beiläufig daran, daß wir bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung auch von einem andern, dem „*Veronesschen*" *Kontinuum* gesprochen hatten, das aus dem gewöhnlichen durch Hinzunahme der aktual unendlich kleinen Größen entsteht; dies bildet zwar auch eine einfach geordnete Menge, insofern über die Aufeinanderfolge je zweier Elemente bestimmt entschieden ist, aber es besitzt natürlich einen *ganz andern Ordnungs-*

und alle Elemente aus A allen aus B vorangehen, so hat entweder A ein letztes oder B ein erstes Element. Erinnern wir uns an die Dedekindsche Definition der Irrationalzahlen (vgl. S. 83 ff), so können wir das auch kurz so aussprechen, daß jeder *Schnitt* in unserer Menge tatsächlich durch ein Element von ihr hervorgerufen wird.

2.) *Zwischen 2 beliebigen Elementen der Menge liegen immer noch unendlich viele andere.*

Diese zweite Eigenschaft hat das Kontinuum mit der abzählbaren Menge aller rationalen Zahlen gemein, die erste aber macht den wesentlichen Unterschied beider aus. Alle einfach geordneten Mengen, die diese beiden Eigenschaften besitzen nennt man in der Mengenlehre *stetig*, denn man kann tatsächlich alle Sätze für sie beweisen, die für das Kontinuum vermöge seiner Stetigkeit gelten. –

Ich deute gern noch an, daß man diese Stetigkeitseigenschaften noch etwas anders formulieren kann, indem man die *Cantorschen Fundamentalreihen* an die Spitze stellt. Eine Fundamentalreihe ist eine einfach geordnete abzählbare Reihe solcher Elemente $a_1, a_2, a_3 \dots$ der Menge, von denen in der an, und das tun die Mengentheoretiker tatsächlich, die Frage nach den sämtlichen überhaupt möglichen Anordnungstypen der abzählbaren Mengen knüpfen.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums über, so kennen wir eine einfach geordnete Menge im Kontinuum C_1 aller reellen Zahlen; daneben haben wir aber in den zwei- und mehrdimensionalen Typen C_2, C_3 ... Beispiele einer anderen, als der einfachen Ordnung; beim C_2 beispielsweise sind nicht mehr eine, sondern 2 Relationen nötig, um die gegenseitige Lage zweier Punkte zu bestimmen.

Die Hauptsache wird nun hier sein, den Begriff der Stetigkeit des eindimensionalen Kontinuums zu analysieren; die Erkenntnis, daß dieser tatsächlich nur in einfachen Eigenschaften der dem C_1 eigentümlichen Anordnung beruht, ist die erste große Leistung der Mengenlehre für die Aufklärung der herkömmlichen mathematischen Begriffe. Man findet nämlich alle Stetigkeitseigenschaften des Kontinuums darin begründet, daß es eine einfach geordnete Menge mit folgenden beiden Eigenschaften ist:

1.) Teilen wir die Menge in irgend zwei Teile A, B derart, daß jedes Element zu einem dieser Teile gehört dem andern kommt, d.h. – algebraisch gesprochen – welches das kleinere und welches das größere ist; und ferner geht von 3 Elementen a, b, c, wenn a dem b und b dem c vorangeht, auch stets a dem c voran (wenn $a < b$ und $b < c$, so auch $a < c$).

Doch nun die charakteristischen Unterschiede: Bei 1) existiert ein erstes Element (die Null), das allen andern vorangeht, aber kein letztes, das auf alle andern folgt, bei 2) existiert weder ein erstes noch ein letztes; beiden gemein ist aber, daß auf jedes Element ein bestimmtes anderes folgt, und daß ihm ebenso ein bestimmtes vorangeht. Im Gegensatz dazu liegen, wie wir schon früher gelegentlich sahen (S. 78), bei 3) zwischen je zwei Elementen immer noch unendlich viele andere, (wir nannten das „überall dicht"), so daß es insbesondere unter allen zwischen a, b gelegenen rationalen oder algebraischen Zahlen (wenn man diese selbst nicht hinzurechnet), weder eine kleinste noch eine größte gibt. Die Arten der Anordnung dieser drei Beispiele, ihre Anordnungstypen (das Cantorsche Wort Ordnungstypen scheint mir nicht so bezeichnend) sind also sämtlich verschieden, obwohl ihre Mächtigkeit die gleiche ist; man könnte hier-

Mengenlehre sein, die in der Mathematik von altersher geläufigen Unterschiede durch Einführung neuer allgemeinster Begriffe aufzuheben, vielmehr soll und kann sie dazu beitragen, jene Unterschiede durch Hervorhebung allgemeiner Begriffe in ihrem tiefsten Wesen zu erfassen.

Wir wollen hier lediglich die *Begriffe der verschiedenen möglichen Anordnungen* an bestimmten, allbekannten Beispielen uns klar machen. Beginnen wir mit den *abzählbaren Mengen*, so kennen wir *drei grundverschieden angeordnete Erscheinungsformen*, so verschieden, daß die Uebereinstimmung ihrer Mächtigkeit, wie wir sahen, ein besonderes und keineswegs selbstverständliches Theorem bildete; es sind dies

1.) *die Menge der positiven ganzen Zahlen.*
2.) *die Menge aller (negativen und positiven) ganzen Zahlen.*
3.) *die Menge aller rationalen Zahlen und die aller algebraischen Zahlen.*

Alle diese 3 Mengen haben in der Anordnung ihrer Elemente zunächst eine gemeinsame Eigenschaft, derzufolge man sie als *einfach geordnet* bezeichnet: *Es ist von je 2 Elementen stets entschieden, welches vor* bestehende, beliebig durcheinandergewürfelte Dinge bestehen ließen; und wichtig ist auch, daß wir *3 dieser Abstufungen schon innerhalb der in der Mathematik auch sonst geläufigen Dinge*, der ganzen Zahlen, Kontinua und Funktionen, feststellen konnten.

Ich schließe damit den ersten Teil meiner mengentheoretischen Erörterungen, in dem ich über den Mächtigkeitsbegriff sprach. In ähnlicher konkreter Weise, nur etwas kürzer noch, will ich Ihnen jetzt einiges aus einem *weiteren Teil der Mengenlehre* mitteilen, der von der

2. Anordnung der Elemente einer Menge

handelt. Hier tritt also gerade das in den Vordergrund, was wir bisher prinzipiell vernachlässigten, *wie sich nämlich die einzelnen Mengen der gleichen Mächtigkeit* durch die gegenseitigen Anordnungsbeziehungen, die ihre Elemente von Haus aus besitzen, *von einander unterscheiden*; die allgemeinen bisher zugelassenen eineindeutigen Abbildungen zerstören ja alle diese Beziehungen; denken Sie nur an die Abbildung des Quadrates auf die Strecke! Ich möchte hier die *Bedeutung gerade dieses Abschnittes der Mengenlehre* besonders betonen; kann es doch unmöglich der Zweck der

Es ist interessant, diesen Beweis mit dem ganz analogen für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums zu vergleichen. Wie wir dort die Dezimalbrüche alle in einem abzählbaren Schema angeordnet annahmen, so betrachten wir hier das Funktionsschema $f(x, v)$; dem Hervorheben der Diagonalelemente dort entspricht hier die Herstellung der Diagonalfunktion $f(x, x)$, und beides findet die gleiche Verwendung zur Bildung eines neuen in dem Schema noch nicht enthaltenen Dezimalbruches, bzw. einer neuen Funktion.

Sie werden sich nun leicht vorstellen können, daß man *durch ähnliche Betrachtungen zu unendlichen Mengen immer höherer Mächtigkeit* aufsteigen kann, noch über die drei bisher gewonnenen verschiedenen Mächtigkeiten hinaus. Das Bemerkenswerteste an diesem ganzen Resultate ist eigentlich doch das, *daß es überhaupt bleibende Unterschiede und Abstufungen in den verschiedenen unendlichen Mengen gibt*, obwohl wir sie doch mit den denkbar schärfsten Mitteln behandelten, die alle Besonderheiten, wie Anordnung u. dgl. zerstörten und nur ihre Einzelelemente, ihre Atome gewissermaßen, als unabhängig von einander

der Schar der $f(x, v)$, d. i. die Funktion, die an jeder Stelle $x = x_0$ den Wert hat, welchen die dem gleichen Parameterwerte $v = x_0$ zugeordnete Funktion $f(x, x_0)$ an der Stelle $x = x_0$ annimmt, also den Wert $f(x_0, x_0)$. Als Funktion von x geschrieben, ist das daher einfach die *Funktion $f(x, x)$*.

c.) Nun bilden wir eine *Funktion $F(x)$, die an jeder Stelle x von diesem $f(x, x)$ verschieden ist,*

$F(x) \neq f(x, x)$ für jedes einzelne x.

Das können wir auf äußerst mannigfaltige Weise tun, da wir ja durchaus unstetige Funktionen zulassen, deren Wert an jeder Stelle ganz willkürlich bestimmt werden kann; ein *Beispiel* wäre etwa *$F(x) = f(x, x) + 1$*.

d.) *Dieses $F(x)$ ist nun in der Tat von jeder einzelnen der Funktionen $f(x, v)$ verschieden*; denn wäre $F(x) = f(x, v_0)$ für irgend ein bestimmtes $v = v_0$, so müsste diese Übereinstimmung speziell auch an der Stelle $x = v_0$ stattfinden, also $F(v_0) = f(v_0, v_0)$ sein. Das widerspricht aber gerade der Annahme c.) über $F(x)$.

Damit ist die Annahme a.) widerlegt, daß die Funktionen $f(x, v)$ alle Funktionen erschöpfen könnten, und *unsere Behauptung bewiesen*.

valent. Dieser Satz ist äußerst plausibel; der ausführliche Beweis würde uns hier zu weit führen.

b.) Das Kontinuum C_1 und die Menge der stetigen Funktionen stehen nun nach e.) und f.) gerade in der im Aequivalenzsatz vorausgesetzten Beziehung; also sind sie von gleicher Mächtigkeit, und damit ist unser Satz bewiesen.

Gehen wir nunmehr zu dem interessanteren Beweise für unsere zweite Behauptung über, daß die Menge aller möglichen, wirklich „ganz willkürlichen" Funktionen eine größere Mächtigkeit besitzt, als das Kontinuum; er ist eine genaue Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens:

a.) Angenommen unsere Behauptung sei falsch, d.h. die Menge aller Funktionen eineindeutig auf das Kontinuum C_1 abbildbar; es möge bei dieser Abbildung jeder Stelle $x = v$ aus C_1 die Funktion $f(x, v)$ von x entsprechen, so daß während v das Kontinuum durchläuft, $f(x, v)$ alle möglichen Funktionen von x darstellt. Wir wollen diese Annahme dadurch ad absurdum führen, daß wir eine von sämtlichen Funktionen $f(x, v)$ sicherlich verschiedene Funktion $F(x)$ tatsächlich konstruieren.

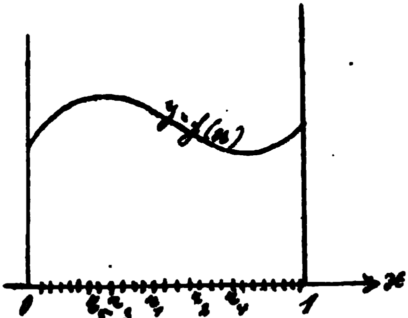
b.) Dazu bilden wir uns die „Diagonalfunktion" d.) Nun können die Größen $f_1 = f_1(r_1),\ f_2 = f(r_2)$.. als Koordinaten einer C_∞ aufgefasst werden, da sie ja abzählbar unendlich viele kontinuierlich veränderliche Größen darstellen; nach dem vorhin bewiesenen Satze ist also die Gesamtheit ihrer möglichen Wertsysteme von der Mächtigkeit des Kontinuums.

e.) Als Teilmenge dieser auf das Kontinuum eineindeutig abbildbaren Menge ist daher die Menge aller stetigen Funktionen eineindeutig abbildbar auf eine Teilmenge des Kontinuums.

f.) Wir können nun aber leicht einsehen, daß auch umgekehrt das gesamte Kontinuum eineindeutig abbildbar ist auf eine Teilmenge der stetigen Funktionen. Dazu brauchen wir nur die durch $f_1 = f_2 = \dots = k$ definierten Funktionen $f(x) = k =$ Const. zu betrachten, wo k ein reeller Parameter ist; durchläuft k das Kontinuum C_1, so durchläuft $f(x) = k$ in der Tat eine auf C_1 eineindeutig abgebildete Teilmenge aller stetigen Funktionen.

g.) Nun müssen wir den sog. Aequivalenzsatz benutzen, der von F. Bernstein und E. Schröder ungefähr gleichzeitig bewiesen worden ist: Ist von zwei Mengen jede einem Teile der andern aequivalent, so sind diese beiden Mengen auch zueinander aequi-

Ich will zunächst die <u>zweite Behauptung über die Menge der stetigen Funktionen</u> beweisen; das wird auf eine Wiederholung und Verschärfung von Überlegungen herauskommen, die wir schon früher (S. 450) anstellten, um die Darstellbarkeit „willkürlicher" Funktionen nach trigonometrischen Reihen plausibel zu machen. Da hatte ich bereits gezeigt, daß



a.) eine <u>stetige Funktion $f(x)$ bestimmt ist, wenn man nur die Werte $f(x)$ an allen rationalen Stellen x kennt</u>.

b.) Wir wissen nun, daß wir <u>alle rationalen Werte x in eine abzählbare Reihe $x_1, x_2, x_3 \ldots$</u> bringen können.

c.) Daher ist $f(x)$ bestimmt, wenn man die abzählbar unendlich vielen Größen $f(x_1), f(x_2) \ldots$ kennt. Uebrigens können diese Werte natürlich nicht ganz beliebig angenommen werden, wenn wir eine eindeutige stetige Funktion erhalten wollen; <u>die Menge aller möglichen Wertsysteme der $f(x_1), f(x_2) \ldots$ enthält aber jedenfalls eine Teilmenge, die von gleicher Mächtigkeit mit der Menge aller stetigen Funktionen ist</u>.

zweierlei von einander verschiedene Mächtigkeiten gibt:

1.) *die der abzählbaren Mächtigkeiten*

2.) *die aller Kontinua $C_1, C_2, C_3 \ldots$ einschl. C_∞.*

Es erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob es nicht auch noch *größere Mächtigkeiten* gibt, und da kann man nun in der Tat nicht nur durch abstrakte Betrachtungen sondern durchaus innerhalb des Rahmens der Begriffe, die man in der Mathematik durchweg stets gebraucht, eine weitere größere Mächtigkeit aufweisen, nämlich

3.) *die aller möglichen reellen Funktionen $f(x)$ eines reellen x.*

Es genügt dabei, die Variable auf das Intervall $0 < x < 1$ zu beschränken. Zunächst wird man da natürlich an die Menge der *stetigen Funktionen* $f(x)$ denken, aber da gilt gerade noch der bemerkenswerte Satz, *daß die Gesamtheit aller stetigen Funktionen noch die Mächtigkeit des Kontinuums hat, also der Gruppe 2.) zugehört.* Zu einer neuen größeren Mächtigkeit kommen wir erst, wenn wir auch durchaus unstetige Funktionen der denkbar allgemeinsten Art zulassen, d.h. jeder Stelle x den Funktionswert ganz beliebig und ohne jede Rücksicht auf die Nachbarwerte zuordnen.—

digen und vorher nur Stellen enthalten. Nun müssen wir alle diese unendlich vielen Dezimalbrüche zu einem neuen zusammenfassen, der rückwärts seine Bestandteile wieder erkennen läßt, oder um im chemischen Bilde zu bleiben: wir haben eine so lose Legierung aller dieser Molekularaggregate zu bilden, daß wir leicht wieder aus ihr die Komponenten abtrennen können. Das gelingt nun sofort durch das schon früher (S. 555) angewandte „*Querlinienverfahren*"; wir schreiben in der durch die successiven Linien im obigen Schema bereits angedeuteten Reihenfolge:

$$x = 0, a_1\, a_2\, b_1\, a_3\, b_2\, c_1\, a_4\, b_3\, c_2\, d_1\, a_5 \dots,$$

womit jedem Punkt des C_∞ eindeutig ein Punkt des C_1 zugeordnet ist. Umgekehrt erhalten wir so *jeden* Punkt x des C_1, denn wir können aus seiner nicht abbrechend geschriebenen Dezimalbruchdarstellung nach dem angegebenen Schema in eindeutiger Weise unendlich viele nicht abbrechende Dezimalbrüche $x_1, x_2, x_3 \dots$ herleiten, aus denen er durch das angegebene Verfahren entsteht. *Es ist so in der Tat die eineindeutige Abbildung des Einheitswürfels im C_∞ auf die Einheitsstrecke des C_1 gelungen.*

Unser bisheriges Resultat ist, daß es *jedenfalls* ja immer die Gesamtheit aller Potenzreihen oder trigonometrischen Reihen betrachtet, wo die abzählbar unendlich vielen Koeffizienten eigentlich doch nichts als ebensoviele unabhängige Variable sind, die freilich stets noch an gewisse Konvergenzbedingungen geknüpft erscheinen.

Wir wollen uns wiederum auf den „Einheitswürfel" des C_∞ beschränken, d. h. auf die Gesamtheit aller an die Bedingung $0 < x_n \leqq 1$ geknüpften Punkte und nachweisen, daß man sie eineindeutig den Punkten der Einheitsstrecke $0 < x \leqq 1$ des C_1 zuordnen kann. (Dabei sind der Bequemlichkeit halber wieder die Randgebiete $x_n = 0$ bezw. $x = 0$ weggelassen). Wir gehen, wie oben, von der Dezimalbruchdarstellung der Koordinaten im C_∞ aus:

$$\begin{array}{l}
x_1 = 0,\, a_1\; a_2\; a_3 \;\ldots \\
x_2 = 0,\, b_1\; b_2\; b_3 \;\ldots \\
x_3 = 0,\, c_1\; c_2\; c_3 \;\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

wobei diese Dezimalbrüche einmal sämtlich in der nicht-abbrechenden Gestalt geschrieben seien, und weiterhin die $a, b, c \ldots$ „Dezimalbruchmoleküle" im oben festgelegten Sinne bedeuten sollen, d. h. Ziffernkomplexe, die mit einer von Null verschiedenen Ziffer endeutig zu, das seinerseits rückwärts x und y bestimmt. Jetzt zerfällt aber jedes z rückwärts in ein x und y mit je unendlich vielen „Molekülen", und entsteht daher genau einmal, wenn wir x/y alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche durchlaufen lassen; damit sind aber tatsächlich *Strecke und Quadrat eineindeutig auf einander abgebildet, d. h. sie haben dieselbe Mächtigkeit.*

Natürlich kann man in ganz analoger Weise zeigen, *daß auch das Kontinuum von 3, 4 ... Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt, wie das eindimensionale.* Merkwürdiger ist aber, *daß auch das Kontinuum C_∞ von unendlich vielen, soll heißen von abzählbar unendlich vielen Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt*; von diesem unendlichdimensionalen Raum ist ja jetzt hier in Göttingen besonders viel die Rede. Er ist definiert als Gesamtheit der Wertesysteme, die abzählbar unendlich viele Veränderliche

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

annehmen können, wenn eine jede für sich alle reellen Werte durchläuft. Dies ist eigentlich nur eine neue Ausdrucksweise für eine in der Mathematik längst gebräuchliche Begriffsbildung; man hat die man nur aus einem abbrechenden x oder y, im Beispiel

$$x = 0{,}a_1 000\ldots,\quad y = 0{,}a_2\, a_4\, a_6\, a_8 \ldots$$

erhält.

Diese Schwierigkeit kann man am besten durch einen von J. König in Budapest vorgeschlagenen Kunstgriff beseitigen. Er versteht nämlich unter den a, b, c nicht schlechtweg die Ziffern, sondern gewisse Ziffernkomplexe, man könnte vielleicht sagen „Moleküle" der Dezimalbrüche, zu denen er unter Hervorhebung der Rolle der Nullen jede geltende von 0 verschiedene Ziffer der Dezimalbrüche mit allen ihr direkt vorangehenden Nullen zusammenfaßt; dann muß jeder nicht abbrechende Dezimalbruch auch unendlich viele Moleküle haben, da immer wieder von Null verschiedene Ziffern kommen, und umgekehrt. Beispielsweise sind in

$$x = 0{,}3208007000302405\ldots$$

als Moleküle zu nehmen: $a_1 = [3], a_2 = [2], a_3 = [08], a_4 = [007], a_5 = [0003]$, etc.

Nun mögen in der obigen Regel für den Zusammenhang von x/y mit z die a, b, c in der Tat solche Moleküle bedeuten. Dann gehört jedem Paare x/y wiederum ein nicht abbrechender z ein-nachträglich überlegen, daß diese an der Mächtigkeit nichts ändern. Die Grundidee des Cantorschen Beweises ist jetzt, diese beiden Dezimalbrüche zu einem neuen Dezimalbruch z zu verschmelzen, aus dem man rückwärts x, y eindeutig herstellen kann, und der genau einmal alle Werte $0 < z \leqq 1$ durchläuft, wenn der Punkt $x \mid y$ einmal das Quadrat durchläuft; deutet man z als Abszisse, so hat man damit tatsächlich die gewünschte eineindeutige Beziehung des C_1 und C_2.

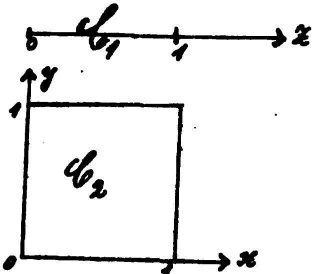
Man wird nun diese Verschmelzung zuerst versuchen, indem man setzt

$$z = 0, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots,$$

woraus in der Tat durch Abtrennen der geraden und ungeraden Dezimalstellen eindeutig x und y zu erhalten ist. Doch da erhebt sich ein Einwand aus der zweideutigen Schreibweise der Dezimalbrüche: Dieses z durchläuft nämlich durchaus nicht das ganze C_1, wenn wir für $x \mid y$ alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche, also alle Punkte des C_2 nehmen; denn z ist dann zwar stets nicht abbrechend, aber es gibt nicht abbrechende Werte z, wie z. B.

$$z = 0, c_1\, c_2\, 0\, c_4\, 0\, c_6\, 0\, c_8 \ldots,$$

mensionalen Kontinuums C_2 genau gleich der der eindimensionalen C_1 sei. Nehmen wir für das C_2 das Quadrat von der Seitenlänge 1, sowie für C_1 die Einheitsstrecke, so sollen also die Punkte beider eineindeutig aufeinander bezogen werden können. Daß diese Behauptung so paradox aussieht, liegt wohl daran, daß man sich zunächst von der Vorstellung einer gewissen Stetigkeit der Zuordnung nicht frei machen kann, aber in der Tat ist die Beziehung, die wir herstellen wollen, so unstetig, ja – wenn Sie wollen – so unorganisch, wie nur möglich; sie zerstört eben alles, was dem ebenen bzw. linearen Gebilde als solchem charakteristisch ist, mit Ausnahme der „Mächtigkeit", so etwa, als ob man alle Punkte des Quadrates in einen Sack tut und aufs gründlichste durcheinanderrüttelt.



Die Menge der Quadratpunkte stimmt nun überein mit der Menge aller Dezimalbruchpaare:

$$x = 0{,}a_1\, a_2\, a_3 \ldots,\quad y = 0{,}b_1\, b_2\, b_3 \ldots,$$

die wir wieder sämtlich nicht abbrechend annehmen wollen; wir schließen dabei also die beiden Randstrecken $x = 0$, $y = 0$ aus; aber man kann sich leicht haupt x', das doch ein ganz vernünftiger Dezimalbruch ist, von allen Zahlen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ des abzählbaren Schemas verschieden. Also ist der gewünschte Widerspruch erreicht und die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums C_1 bewiesen.

Durch diesen Satz ist nun a priori die Existenz transzendenter Zahlen gesichert, denn die Gesamtheit der algebraischen Zahlen war abzählbar, und kann daher das nichtabzählbare Kontinuum aller reellen Zahlen nicht erschöpfen. Während alle früheren Erörterungen uns aber immer nur abzählbar unendlich viele transzendente Zahlen kennen lehrten, folgt aber hier, daß ihre Mächtigkeit tatsächlich größer ist, so daß wir jetzt erst die richtige allgemeine Einsicht bekommen; freilich beleben jene speziellen Beispiele ihrerseits wieder das hier etwas abstrakte Bild.

Nachdem wir das eindimensionale Kontinuum erledigt haben, wird die Untersuchung des zweidimensionalen nahe liegen; da hatte gewiß jedermann geglaubt, daß die Ebene mehr Punkte enthielte als die Gerade, und daher erregte es das größte Aufsehen, als Cantor zeigte,[1] daß die Mächtigkeit des zweidi-

1) Bd. 84 des Journ. f. d. r. u. a. Math. (1878).

daß wir nur unendliche nicht abbrechende Dezimalbrüche verwenden, also statt abbrechender stets solche einführen, die mit lauter Neunen schließen. Solche Brüche mögen die oben in dem abzählbaren Schema stehenden alle bereits sein.

Um nun einen von allen Zahlen des Schemas verschiedenen Dezimalbruch α' zu bilden, heben wir die in der oben markierten Diagonale (daher der Name des Verfahrens) stehenden Ziffern $a_1, b_2, c_3 \dots$ hervor, und setzen an die erste Stelle von α' eine von a_1 sicher verschiedene Ziffer a_1', an die zweite eine von b_2 verschiedene b_2', an die dritte eine von c_3 verschiedene c_3' und so fort:

$$\alpha' = 0, a_1' \, b_2' \, c_3' \dots$$

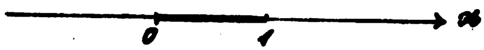
Diese Bedingungen für $a_1', b_2', c_3' \dots$ lassen uns aber offenbar noch genügend Freiheit, dafür zu sorgen, daß α' nicht etwa hinter einer endlichen Stelle abbricht; wir können ja sogar $a_1', b_2', c_3' \dots$ von Null verschieden annehmen. Dann ist aber α' sicherlich von α_1 verschieden, da die ersten Ziffern nicht übereinstimmen und zwei nicht abbrechende Dezimalbrüche nur dann gleich sein können, wenn alle Ziffern übereinstimmen; ebenso ist $\alpha' \neq \alpha_2$ wegen der zweiten, $\alpha' \neq \alpha_3$ wegen der dritten Ziffer, und so ist übersprünglich 1873 publizierte. *Die Hauptsache dabei ist ein höchst einfaches Verfahren, das sog. Diagonalverfahren, das zu jeder angenommenen abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen eine sicher in ihr* ***nicht*** *enthaltene reelle Zahl liefert*; das ist ein *Widerspruch* und daher kann das C_1 nicht abzählbar sein.

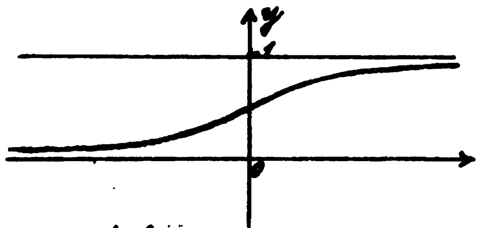
Wir schreiben alle unsere Zahlen $0 < x < 1$ des C_1 als Dezimalbrüche; sie seien sämtlich in eine abzählbare Reihe gebracht:

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0, & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ x_2 = 0, & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ x_3 = 0, & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \end{array}$$

wo die a, b, c Ziffern $0, 1, \dots 9$ in jeder möglichen Auswahl und Reihenfolge sind. Man muß sich nun zunächst darüber klar werden, daß die *Dezimalbruchschreibweise nicht völlig eindeutig bestimmt* ist, da ja z. B. $0,999\dots = 1,000\dots$ ist, und da man überhaupt jeden abbrechenden Dezimalbruch auch mit lauter Neunen schließen kann; das ist ja eine der ersten Voraussetzungen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen. (vgl. S. 86) Um nun hier eine *eindeutige Bezeichnung* zu erreichen, setzen wir ein für alle Male *fest*, nicht abzählbar ist; wir bezeichnen es kurz mit $\mathfrak{C}_1$, da wir später noch von mehrdimensionalen Kontinuis zu reden haben werden.

$\mathfrak{C}_1$ ist zunächst definiert als Gesamtheit aller endlichen reellen Werte x, wo wir x etwa als Abszisse auf einer Achse uns vorstellen mögen. Wir wollen nun zuerst zeigen, daß die Menge aller Punkte der Einheitsstrecke $0 < x < 1$ genau die gleiche Mächtigkeit hat. Denken wir nämlich die erste Menge auf einer x-Achse, die zweite auf einer dazu senkrechten y-Achse, so wird eine eineindeutige Abbildung zwischen ihnen vermittelt durch eine monoton ansteigende Kurve der skizzierten Art, die nach links $y=0$, nach rechts $y=1$ zur Asymptote hat (etwa wie ein Ast von $y = \frac{1}{\pi}$ arc tg x). Wir werden also für das $\mathfrak{C}_1$ die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1 setzen dürfen, was fortan geschehen soll.





Ich will nun für die Nichtabzählbarkeit des $\mathfrak{C}_1$ den Beweis vortragen, den Cantor 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle gegeben hat; er ist übersichtlicher und verallgemeinerungsfähiger als der urmit $c_1, c_2, c_3 \ldots$ die der dritten Menge und so fort, so brauchen wir nur die sämtlichen Elemente in der Reihenfolge aufzufassen, die die successiven Querlinien im folgenden Schema andeuten:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots ;
\end{array}$$

die so entstehende Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
a_1 & a_2 & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & a_5 \ldots
\end{array}$$

ordnet jeder der Zahlen $a, b, c, \ldots$ eine und nur eine bestimmte Nummer zu, womit die Behauptung bewiesen ist. Man könnte das, an jenes Schema anknüpfend, eine „Abzählung nach Diagonalen" nennen.

Die große Mannigfaltigkeit abzählbarer Mengen, die wir so kennen gelernt haben, könnte zunächst die Meinung hervorrufen, daß überhaupt alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Demgegenüber beweisen wir nun den zweiten Teil des Cantorschen Satzes, daß das Kontinuum aller reellen Zahlen gewiß die natürliche Rangordnung durchaus zerstört, wenn sie auch innerhalb der Zahlen gleicher Höhe erhalten bleibt. Z. B. haben zwei einander so nahe liegende Zahlen wie $\frac{2}{5}$ und $\frac{2001}{5000}$ die weit auseinanderliegenden Höhen 7 bzw. 7001, während $\sqrt{5}$ als Wurzel von $x^2 - 5 = 0$ dieselbe Höhe 7 hat, wie $\frac{2}{5}$.

Bevor wir nun zu dem letzten Beispiele übergehen, schalte ich gern einen kleinen Hilfssatz ein, der uns noch weitere abzählbare Mengen liefert und uns gleichzeitig mit einem auch später zu benutzenden Beweisverfahren bekannt macht. Sind zunächst zwei abzählbare Mengen gegeben:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \dots \quad \text{und} \quad b_1,\ b_2,\ b_3\ \dots,$$

so ist die aus ihnen durch Verschmelzung entstehende Menge aller a und aller b offenbar wieder abzählbar; denn man kann sie in dieser Reihenfolge schreiben:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \dots\dots,$$

und damit sofort der Reihe der ganzen Zahlen eindeutig zuordnen. Ebenso geben natürlich auch 3, 4 ..., überhaupt endlich viele abzählbare Mengen vereinigt wiederum eine abzählbare Menge.

Bezeichnen wir nämlich mit $a_1, a_2, a_3 \dots$, die Elemente der ersten, mit $b_1, b_2, b_3 \dots$ die der zweiten, der endlichen Grenze N bleiben, *so daß jeder Klasse überhaupt nur endlich viele Gleichungen und daher insbesondere auch nur endlich viele irreduzible Gleichungen angehören können*; die Koeffizienten kann man durch Ausprobieren aller möglichen Lösungen der Gleichung für N leicht ermitteln, und man kann den Anfang der Reihe der Gleichungen für die niedersten N in der Tat sofort hinschreiben.

Nun bestimmen wir für jede bestimmte Höhe N die reellen Wurzeln der endlich vielen zugehörigen irreduziblen Gleichungen, deren es nur eine endliche Anzahl geben kann, und ordnen sie ihrer natürlichen Größe nach; dann nehmen wir zuerst die so geordneten Zahlen der Höhe 1, dann die der Höhe 2, und so fort und numerieren sie in dieser Reihenfolge. *Damit ist dann in der Tat die Menge aller algebraischen Zahlen abgezählt*, denn wir kommen so an jede algebraische Zahl und brauchen andererseits auch jede ganze Zahl als Nummer auf. In der Tat kann man mit genügender Geduld etwa die 7563te Zahl des angegebenen Schemas ermitteln, oder zu einer noch so komplizierten vorgegebenen algebraischen Zahl die zugehörige Nummer bestimmen.

Auch hier wird durch die Abzählung wieder

$$a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega + a_n = 0,$$

die wir irreduzibel annehmen wollen, d.h. wir lassen alle etwa abtrennbaren rationalen Faktoren und auch etwaige gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $a_0, a_1, \dots a_n$ fort; wir setzen noch fest, daß a_0 etwa stets positiv sein möge. Dann genügt bekanntlich jede algebraische Zahl nur einer einzigen so normierten irreduziblen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, und umgekehrt gehören zu jeder solchen Gleichung als Wurzeln höchstens n reelle algebraische Zahlen, vielleicht aber weniger, oder gar keine. Würden wir nun alle diese algebraischen Gleichungen in eine abzählbare Reihe bringen können, so wären damit auch offenbar ihre Wurzeln und daher auch alle reellen algebraischen Zahlen abgezählt.

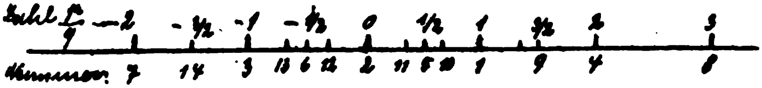
Das ist nun Cantor dadurch gelungen, daß er jeder Gleichung eine bestimmte positive Zahl, die „Höhe“

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

zuordnete, und die Gleichungen in eine abzählbare Folge von Klassen teilte, je nachdem $N = 1, 2, 3 \dots$ ist. In jeder einzelnen dieser Klassen muß nach der Definition von N sowohl die Gradzahl n als auch jeder der Koeffizienten seinem absoluten Betrage nach unter eine Zahl entkommt und alle ganzen Zahlen erschöpft werden. Lassen wir jetzt aus dieser Reihenfolge alle die Wertepaare fort, die nicht den oben ausgesprochenen Bedingungen (Teilerfremdheit und $q > 0$) genügen, und numerieren nur alle übrig bleibenden, (in der Figur durch Punkte markierten) so erhalten wir eine Reihe, die so beginnt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	0	−1	2	$1/2$	$-1/2$	−2	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	...

und die jeder rationalen Zahl genau eine ganze, jeder ganzen genau eine rationale anordnet; damit ist die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen.

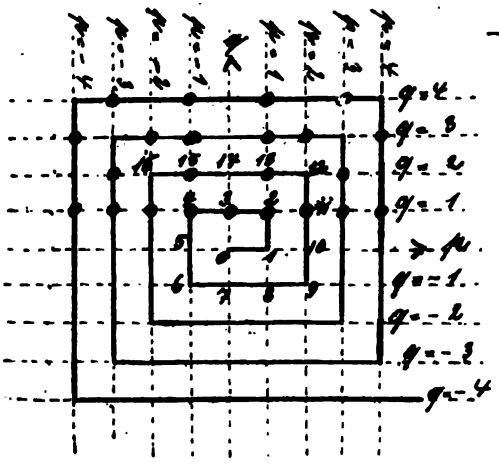


Uebrigens wird durch diese Anordnung der rationalen Zahlen in eine abzählbare Reihe ihre natürliche Rangordnung nach der Größe von Grund auf zerstört; das zeigt nebenstehende Skizze, in der an die rationalen Punkte der Abszissenachse ihre Ordnungsnummern in jener künstlichen Reihenfolge angeschrieben sind.

Wir kommen jetzt weiter zu den algebraischen Zahlen, und auch hier will ich mich auf die reellen beschränken, obwohl die Betrachtung der komplexen nicht wesentlich schwieriger wäre. Jede reelle algebraische Zahl ω genügt einer reellen ganzzahligen Gleichung:

Zahlen aber hat eine davon verschiedene größere Mächtigkeit. Man nennt eine Menge, deren Elemente man der Reihe der ganzen positiven Zahlen eineindeutig zuordnen kann (die also mit dieser gleiche Mächtigkeit hat), *abzählbar*; dann lautet jener Satz: *Die Menge der rationalen sowie der algebraischen Zahlen ist abzählbar, die Gesamtheit aller reellen Zahlen aber ist nicht abzählbar.*

Führen wir zunächst den *Beweis für die rationalen Zahlen*, der gewiss vielen von Ihnen bekannt ist. Jede rationale Zahl – wir mögen die negativen bald mit hinzunehmen – ist eindeutig in der Form $\frac{p}{q}$ darstellbar, wo p und q teilerfremd sind, und q etwa stets positiv sei (während p auch negativ sein kann). Um alle diese Brüche $\frac{p}{q}$ in eine Reihe zu bringen, denken wir uns in einer p-q-Ebene zunächst *alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten* *p, q* markiert, und bringen zunächst einmal diese in eine abzählbare Reihe, wie es der spiralartige Weg in nebenstehender Figur andeutet. Danach können wir *alle diese Wertepaare (p/q) numerieren*, so daß jedem nur



diesen Satz doch keineswegs auf unendliche Mengen übertragen; schließlich sind ja solche Abweichungen auch nicht einmal so wunderbar, da man ja eben auf ein ganz neues Gebiet übergegangen ist.

Machen wir uns nun tatsächlich zunächst einmal an einem ganz einfachen Beispiel klar, daß ein Teil einer unendlichen Menge mit ihr tatsächlich gleiche Mächtigkeit haben kann, indem wir etwa die Menge aller positiven ganzen Zahlen neben die aller geraden Zahlen stellen:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots ; \end{array}$$

dann ist die durch Doppelpfeile angedeutete Zuordnung offenbar von der oben geschilderten Art, indem jedem Element der einen Menge ein und nur ein Element der anderen zugehört; nach Cantors Definition hat also die Menge der positiven ganzen Zahlen die gleiche Mächtigkeit wie ihre Teilmenge der geraden Zahlen.

Die Untersuchung der Mächtigkeiten unserer 4 Mengen ist also nicht so einfach abgetan; um so wunderbarer ist das einfache Resultat, Cantors große Entdeckung von 1873: Die drei Mengen der ganzen positiven, der rationalen und der algebraischen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit, die Menge aller reellen

Frage durch Aufstellung praeziser Begriffe geklärt und beantwortet zu haben, und zwar kommt hier vor allem der Begriff „Mächtigkeit" oder „Kardinalzahl" in Betracht: Zwei Mengen haben „gleiche Mächtigkeit" (sind „aequivalent"), wenn sich ihre Elemente eineindeutig einander zuordnen lassen, d. h. wenn man die eine Menge so auf die andere abbilden kann, daß jedem ihrer Elemente umkehrbar eindeutig ein Element der andern entspricht. Ist eine solche Abbildung nicht möglich, so haben die Mengen „verschiedene Mächtigkeit", dabei zeigt sich, daß wie man auch die Elemente einander zuzuordnen versucht, immer noch Elemente einer und derselben von beiden Mengen übrig bleiben, die dann „die größere Mächtigkeit" hat.

Das wollen wir sofort an den 4 aufgeführten Beispielen erläutern. Es liegt vielleicht zunächst die Annahme nahe, daß die Mächtigkeit der ganzen Zahlen kleiner sei, als die der rationalen, diese kleiner als die der algebraischen und diese wiederum kleiner als die aller reellen Zahlen – denn jede dieser Mengen entsteht ja aus der vorangehenden durch Hinzufügung neuer Elemente. Aber dieser Schluß ist durchaus unberechtigt, denn wenn auch jede endliche Menge stets mächtiger ist als irgend ein Teil von ihr, so darf man

Wenn der kurze Überblick über die Mengenlehre, den ich Ihnen hier geben will, etwas Besonderes hat, so soll es das sein, daß die *Behandlung konkreter Beispiele* statt der ganz allgemeinen abstrakten Betrachtungen in den Vordergrund tritt, durch die die Mengenlehre sonst vielfach eine schwer faßliche, abschreckende Form erhalten mag.

1. Die Mächtigkeit von Mengen.

Demgemäß erinnere ich zunächst daran, daß wir in unseren Entwickelungen wiederholt mit *verschiedenen charakteristischen Gesamtheiten von Zahlen* zu tun gehabt haben, die wir jetzt kurzweg *Zahlenmengen* nennen werden. Wenn ich mich nur auf reelle Zahlen beschränke, so waren es:

1.) *die positiven ganzen Zahlen*;
2.) *die rationalen Zahlen*;
3.) *die algebraischen Zahlen*;
4.) *die sämtlichen reellen Zahlen*.

Jede dieser Mengen enthält *unendlich viele Zahlen*. Die Frage ist nun zunächst, ob man nicht trotzdem in bestimmtem Sinne die *Größe oder den Umfang dieser Mengen vergleichen kann*, d. h. ob man nicht *das „Unendlich" der einen größer, gleich oder kleiner als das der anderen nennen kann*. Es ist das große Verdienst von Cantor, diese zunächst ganz unbestimmte

Wesen nach durchaus elementar gewandelt haben, und ich glaube, daß das wesentlich zur übersichtlichen Gestaltung der Beweise beigetragen hat. Vergleichen Sie etwa die Darstellung in Bd. I von Weber-Wellstein, oder auch in meiner eigenen kleinen Schrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" 1), wo im Sinne der älteren Schulbücher das Integralzeichen vermieden und sein Gebrauch durch Abschätzungen von Reihenentwicklungen ersetzt wird, so werden Sie zugeben, daß dort der Beweisgang bei weitem nicht so durchsichtig und leicht aufzufassen ist.

Die letzten Erörterungen über die Verteilung der algebraischen Zahlen innerhalb der reellen Zahlen führen uns naturgemäß zu dem <u>zweiten modernen Gebiete</u>, auf das ich schon wiederholt im Laufe der Vorlesung hinzuweisen hatte, und über das nun einige eingehendere Darlegungen folgen mögen; ich meine

II. die Mengenlehre.

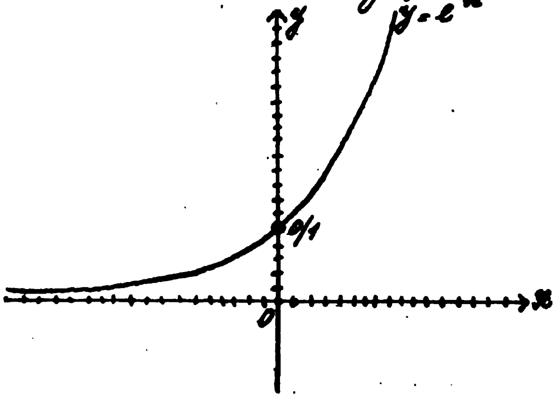
Die Untersuchungen des Begründers dieser Theorie, <u>Georg Cantor in Halle</u>, gehen gerade von Betrachtungen über die Existenz transzendenter Zahlen aus, 2) die diese in einem ganz anderen Lichte erscheinen lassen, als wir sie bisher sahen.

1) zitiert S. 137
2) vgl. Bd. 77 des Journ. f. d. r. u. a. Mathemat. [1873.

<u>Punktkontinuum</u> ist ungeheuer. Wie hätte wohl Pythagoras eine solche Entdeckung gefeiert, wenn ihm das Irrationale schon eine Hekatombe wert schien!

Merkwürdig ist nur, wie wenig diese Fragen der Transzendenz im allgemeinen aufgefaßt und assimiliert worden, obgleich sie so einfach sind, wenn man sie nur einmal durchgedacht hat. Immer wieder muß man beim Examen die Erfahrung machen, daß der Kandidat nicht einmal den Begriff „Transzendenz" erklären kann; meist wird einfach gesagt, eine transzendente Zahl genüge keiner algebraischen Gleichung – und das ist natürlich ganz falsch, wie das Beispiel $x - e = 0$ zeigt. Die Hauptsache, daß die Gleichungskoeffizienten rational sein müssen, ist eben weggelassen.

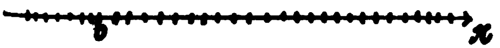
Wenn Sie nun unsere Transzendenzbeweise noch einmal durchdenken, so müssen Sie eigentlich diese <u>einfachen, elementaren Schlüsse</u> als Ganzes begreifen auffassen und sich dauernd zu Eigen machen. Gedächtnismäßig braucht man sich eigentlich nur das Hermitesche Integral zu merken; dann wickelt sich alles durchaus naturgemäß ab. Ich möchte kurz noch besonders betonen, daß wir bei diesen Beweisen im Sinne unserer ganzen Grundideen ruhig den <u>Integralbegriff</u> – geometrisch zu reden den <u>Flächeninhalt</u> – als einen unbegrenzt viele Beispiele besitzen. – Vielleicht noch sinnfälliger wird die Sache, wenn wir unsere Gleichung in der Bezeichnung $y = e^x$ schreiben und in einer x-y-Ebene als Kurve deuten.



Markieren wir nun auf der x-Achse sowohl als auf der y-Achse alle algebraischen Zahlen, und fassen alle Punkte x/y der Ebene auf, die sowohl algebraisches x, als auch algebraische y haben, so wird die ganze x-y-Ebene mit diesen „algebraischen Punkten" überall dicht bedeckt. Trotz dieser dichten Verteilung enthält die Exponentialkurve $y = e^x$ keinen einzigen algebraischen Punkt außer dem $x = 0$, $y = 1$, denn sonst ist nach unserem Satze in $y = e^x$ ja gewiß stets mindestens eine der Größen x, y transzendent. Dieser Verlauf der Exponentialkurve ist gewiß eine höchst merkwürdige Tatsache!

Die gedankliche Bedeutung dieser Sätze, die die Existenz einer großen Menge nicht nur nicht rationaler, sondern nicht einmal durch algebraische Operationen aus ganzen Zahlen darstellbarer Zahlen enthüllen, für unsere Vorstellungen über das Zahl-dann nur neben sämtlichen Wurzeln der algebraischen Gleichung für β auch alle Wurzeln der Gleichung für b zu berücksichtigen, um zu einer (3) analogen Gleichung zu kommen, und deshalb braucht man mehr Bezeichnungen, und der Beweis wird scheinbar unübersichtlicher; wesentlich neue Gedanken werden aber nicht nötig. Ganz analog läßt sich auch der *Beweis des allgemeinsten Lindemannschen Satzes* führen.

Ich will auf diese Beweise hier nicht mehr eingehen, sondern möchte Ihnen lieber die Bedeutung *des letzten Theorems über die Exponentialfunktion* möglichst anschaulich machen. Denken wir uns auf einer Abszissenachse Punkte mit algebraischen Abszissen x markiert. Wir wissen, daß



schon die rationalen und erst recht alle algebraischen Zahlen die Abszissenachse *überall dicht* erfüllen, und man könnte zunächst meinen, daß wenigstens die algebraischen Zahlen alle reellen Punkte x erschöpfen. Und nun ergibt eben unser Satz, daß das nicht der Fall ist, *daß auf der x Achse zwischen den algebraischen Zahlen noch unbegrenzt viele andere, transzendente Zahlen Platz finden,* von denen wir in $e^{\text{algebr. Zahl}}$ sowie $\log(\text{algebr. Zahl})$ sowie in jeder algebraischen Funktion dieser transzendenten Zahlen *insbesondere sicherlich von Null verschieden.* Also kann auch tatsächlich die Gleichung (β)

$$\left\{a_0 M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu\right\} + \left\{\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu\right\} = 0$$

nicht bestehen, denn eine nicht verschwindende ganze Zahl kann sich mit der nach Nr. 4) (S. 538) sicher absolut kleiner als 1 bleibenden $\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu$ nicht zu Null ergänzen. *Damit ist aber der oben (S. 532) ausgesprochene Spezialfall des Lindemannschen Satzes und die in ihm enthaltene Transzendenz von π bewiesen.*

Ich will nun hier noch einen *weiteren interessanten Spezialfall des allgemeinen Lindemannschen Satzes* hervorheben, *daß nämlich in der Gleichung $e^\beta = b$ die Zahlen b und β nicht gleichzeitig algebraisch sein können, mit der einzigen trivialen Ausnahme $\beta = 0$, $b = 1$*; mit anderen Worten *die Exponentialfunktion eines algebraischen Argumentes β sowie der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl b sind mit jener einzigen Ausnahme stets transzendent.* In dieser Aussage ist für $\beta = 1$ die Transzendenz von e, für $b = -1$ die von π (wegen $e^{i\pi} = -1$) mit enthalten. Der Beweis dieses Theorems läßt sich durch genaue Verallgemeinerung der letzten Betrachtungen führen, indem man von $b - e^\beta$ statt wie zuletzt von $1 + e^\alpha$ ausgeht; man hat *rationale Zahlen.* Sie finden auch diesen Satz in den Lehrbüchern der Algebra, und wenn er auch vielleicht nicht überall in dieser praecisen Fassung angegeben ist, so werden Sie sich doch durch Verfolgung der Beweise leicht von seiner Richtigkeit überzeugen können.

Nun genügten die Koeffizienten des Polynoms im Integranden von (9) tatsächlich den Voraussetzungen dieses Satzes und also sind sie *ganze rationale Zahlen*, die wir mit $A_0, A_1 \dots A_{n\cdot\rho-1}$ bezeichnen mögen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^\rho d\zeta}{(\rho-1)!}\left(A_0 + A_1\zeta + \dots + A_{n\cdot\rho-1}\zeta^{n\rho-1}\right).$$

Damit sind wir aber wesentlich am Ziele. Denn führen wir die Integrationen im Zähler auf Grund unserer Γ-Formel (S. 523) aus, so ergeben sich die Faktoren $\rho!, (\rho+1)!, (\rho+2)! \dots$, da jedes Glied eine höhere ζ-Potenz als die ρ^{te} als Faktor enthält, und nach Division durch $(\rho-1)!$ *bleibt überall noch ein Faktor ρ sicher stehen*, während die anderen Faktoren ganze Zahlen (die A_1, $A_2 \dots$) sind; *also ist $\sum_1^n M_\nu$ eine durch ρ sicherlich teilbare ganze Zahl*. Nun war aber (S. 535) $a_0 M$ nicht durch ρ teilbar, also ist *$a_0 M + \sum_1^n M_\nu$ notwendig eine durch ρ nicht teilbare ganze Zahl*, und ist daher

Integranden, als Faktor auftretende Potenz von b_ν. Wir können diese nämlich gerade auf alle auftretenden linearen Faktoren verteilen und schreiben:

$$(9)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu} db_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}d\xi}{(\mu-1)!}\,\xi^{\mu}\sum_{\nu=1}^{\nu}(b_\nu\xi+b_\nu\beta_\nu)^{\mu-1}(b_\nu\xi+b_\nu\beta_\nu-b_\nu\beta_1)^{\mu}\cdots(b_\nu\xi+b_\nu\beta_\nu-b_\nu\beta_\nu)^{\mu}.$$

Analog wie vorhin sind die Koeffizienten des von der Summe dargestellten Polynoms in ξ ganze rationale symmetrische Funktionen der Produkte $b_\nu\beta_1, b_\nu\beta_2 \ldots b_\nu\beta_\nu$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Nun sind aber diese ν Produkte Wurzeln derjenigen Gleichung, die aus (4) hervorgeht, wenn wir z durch $\frac{z}{b_\nu}$ ersetzen:

$$b_0 + b_1\frac{z}{b_\nu} + \ldots + b_{\nu-1}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^{\nu-1} + b_\nu\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^{\nu} = 0;$$

durch Multiplikation mit $b_\nu^{\nu-1}$ geht das über in

$$(10)\quad b_0 b_\nu^{\nu-1} + b_1 b_\nu^{\nu-2}\cdot z + \ldots + b_{\nu-2} b_\nu z^{\nu-2} + b_{\nu-1} z^{\nu-1} + z^{\nu} = 0,$$

eine Gleichung, die durchweg ganzzahlige Koeffizienten und dabei 1 als höchsten Koeffizienten hat. Man nennt solche algebraische Zahlen, die einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1 genügen, ganze algebraische Zahlen, und es besteht folgende Verschärfung des oben genannten Satzes: Rationale ganze ganzzahlige symmetrische Funktionen der sämtlichen Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1, also ganzer algebraischer Zahlen, sind selbst ganze

In dem Produkt von p^{ten} Potenzen in jedem Summanden der Summe fehlt dabei jeweils der ν^{te} Faktor ξ^{ν}, der bereits vor die Summe gezogen ist.

Im Integranden steht nun eine Summe von ν Polynomen in ξ und zwar ist in jedem von ihnen offenbar einer der ν Werte $\beta_1 \dots \beta_\nu$ ausgezeichnet. In der Summe aller dieser Polynome bzw. in den Koeffizienten des Polynoms in ξ, das diese Summe darstellt, treten also alle diese ν Größen gleichberechtigt auf, d.h. jeder dieser Koeffizienten ist eine symmetrische Funktion von $\beta_1 \dots \beta_\nu$; das Ausmultiplizieren der einzelnen Faktoren auf Grund des polynomischen Lehrsatzes läßt aber weiterhin erkennen, daß diese Funktionen ganze rationale Funktionen von $\beta_1 \dots \beta_\nu$ und zwar mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten sind. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind aber rationale symmetrische Funktionen mit rationalen Koeffizienten der sämtlichen Wurzeln einer rationalzahligen Gleichung stets rationale Zahlen, und da die $\beta_1 \dots \beta_\nu$ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (4) sind, sind die Koeffizienten unseres ξ-Polynoms tatsächlich rational.

Wir brauchen aber noch darüber hinaus ganze rationale Zahlen, und die liefert uns die noch im unserm Falle β_r ist. Die so entstehende obere Grenze von ε_r ist dann gleich $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ (wo G das Maximum von $|z(b_0+b_1z+\dots+b_\nu z^\nu)b^{\nu-1}|$, in einem alle Punkte β_r enthaltenden Gebiete), multipliziert mit lauter von p unabhängigen Faktoren, und daraus schließt man, wie oben (S. 528), daß man durch Vergrößerung von p jedes ε_r und daher auch $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\nu$ dem Betrage nach beliebig klein, insbesondere auch kleiner als 1 machen kann.

5.) Wesentlich neue Ueberlegungen werden erst bei der Untersuchung der M_r nötig, die freilich auch genaue Verallgemeinerungen der früheren sind, und nur dem Umstande Rechnung tragen, daß statt rationaler jetzt algebraische ganze Zahlen auftreten. Wir wollen bald die ganze Summe

$$\sum_{r=1}^{\nu} M_r = \sum_{r=1}^{\nu} e^{-\beta_r}\int_{\beta_r}^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}\{b_0+b_1z+\dots+b_\nu z^\nu\}^p b_\nu^{(\nu-1)p-1}$$

in Betracht ziehen. Ersetzen wir hier in jedem Summand vermöge (7) (S. 534) das Polynom in z durch das Produkt der Faktoren $(z-\beta_1)\dots(z-\beta_\nu)$ und führen die neue Integrationsvariable $\zeta = z-\beta_r$ ein, die wegen der für z angenommenen Integrationsweges reell von 0 nach ∞ läuft, so erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\nu} M_r = \sum_{r=1}^{\nu}\int_0^\infty\frac{e^{-\zeta}d\zeta}{(p-1)!}(\zeta+\beta_r)^{p-1}(\zeta+\beta_r-\beta_1)^p\dots\zeta^p\dots(\zeta+\beta_r-\beta_\nu)^p b_\nu^{\nu\cdot p-1}$$
$$= \int_0^\infty\frac{e^{-\zeta}d\zeta}{(p-1)!}\zeta^p\cdot\sum_{r=1}^{\nu}(\zeta+\beta_r)^{p-1}(\zeta+\beta_r-\beta_1)^p\dots(\zeta+\beta_r-\beta_\nu)^p b_\nu^{\nu p-1}.$$

Nach diesem Wege können wir nun M in die beiden charakteristischen Teile zerlegen: Der geradlinige Weg von 0 nach β_ν wird das mit wachsendem p beliebig klein werdende ε_ν liefern, die Parallele von β_ν nach ∞ aber die ganze algebraische Zahl M_ν:

$$(8^a) \qquad \varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu}\int_0^{\beta_\nu} \frac{e^{-z} z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}\left(b_0+b_1 z+\dots+b_\nu z^\nu\right)^p b_\nu^{(\nu-1)p-1}$$

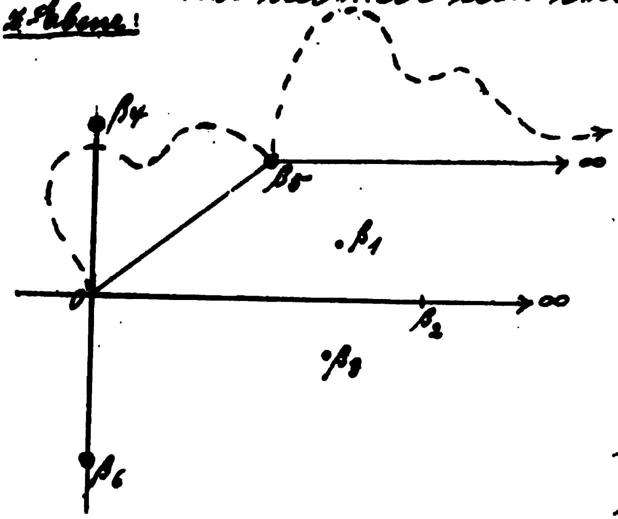
$$(8^b) \qquad M_\nu = e^{\beta_\nu}\int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}\left(b_0+b_1 z+\dots+b_\nu z^\nu\right)^p b_\nu^{(\nu-1)p-1}.$$

Durch diesen Ansatz ist in der Tat (5) befriedigt. Daß wir dabei speziell *geradlinige Wege* benutzen, geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten; ein beliebiger krummer Weg von 0 nach β_ν muß natürlich genau denselben Wert ε_ν liefern, nur kann man aus dem geradlinigen Wege die beste Abschätzung dieses Wertes herleiten. Ebenso können wir statt der Horizontalen von β_ν nach ∞ auch eine beliebige sich nur asymptotisch einer Horizontalen nähernde Kurve verwenden; auch das wäre aber nur unnötig unbequem.

4.) Ich stelle die *Abschätzung* der ε_ν voran, bei der sich nichts gegen früher ändert, wenn man nur benutzt, daß der Betrag eines komplexen Integrales nie größer ist als das Maximum des Integranden, multipliziert mit der Länge des Integrationsweges; die im ren analoge Zerlegung des Integrales U vornehmen, so müssen wir uns erst über den Integrationsweg durch das Komplexe verständigen. Da ist nun glücklicherweise der Integrand unseres Integrales eine im Endlichen überall eindeutige reguläre analytische Funktion der Integrationsvariablen z, die nur bei $z = \infty$ eine singuläre (und zwar eine wesentlich singuläre) Stelle hat. Statt reell von 0 nach ∞ zu integrieren, können wir auch irgend einen anderen von 0 nach ∞ gehenden Integrationsweg benutzen, wenn er nur schließlich wenigstens asymptotisch parallel der reellen positiven Halbachse ins Unendliche einläuft; das ist nötig, damit das Integral überhaupt einen Sinn behält.

Wir denken uns nun die ν Punkte $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ markiert und bemerken speziell, daß wir U auch erhalten, wenn wir erst geradlinig von 0 nach einem der Punkte β_ν, dann geradlinig auf einer Parallelen zur reellen Achse ins Unendliche integrieren.

z-Ebene:



Γ-Formel (S. 523) ausgewertet ist. Alle weiteren Summanden haben aber im Integranden x^p oder noch höhere Potenzen stehen; sie enthalten daher sämtlich den Faktor $\frac{p}{(p-1)!}$ mit ganzen Zahlen multipliziert und sind also durch p teilbar. Daher ist M selbst sicherlich eine durch p nicht teilbare ganze Zahl, wenn jener erste Summand $b_0^p \cdot b_\nu^{(\nu-1)p-1}$ nicht durch p teilbar ist, d. h. sofern die Primzahl p weder Teiler von b_0 noch von b_ν ist. Wegen $b_0 \neq 0$, $b_\nu \neq 0$ kann man p gemäß dieser Bedingung bestimmen, am einfachsten, indem man annimmt:

$$p > b_0 \text{ und } p > b_\nu .$$

Da nun $a_0 \neq 0$, kann man es sofort auch erreichen, daß $a_0 \cdot M$ nicht durch p teilbar ist, indem man etwa, wie früher, noch weiterhin

$$p > a_0$$

bestimmt. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, kann allen diesen Bedingungen noch auf unendlich mannigfache Art genügt werden.

3.) Nun müssen wir an die Bildung von M_ν und ε_ν herantreten. Da tritt nun eine Modifikation gegen das frühere ein, da die an der Stelle der ν tretenden β_ν komplex sein können, ja eines sicher gleich $i\pi$ ist. Wollen wir also eine dem früheweiter wird dann p so groß gewählt, daß der zweite Summand in (6) beliebig klein wird.

1.) Es wird sich nun zunächst darum handeln, M durch eine <u>geeignete Verallgemeinerung des Hermiteschen Integrals</u> zu definieren. Sie beruht auf der Bemerkung, daß der Faktor $(z-1)\dots(z-n)$ des Hermiteschen Integrals gerade die Exponenten der Potenzen von e in der hypothetischen algebraischen Gleichung zu Nullstellen hat; demgemäß ersetzen wir ihn jetzt durch das mit den Exponenten von (3), d. h. den Lösungen von (4) gebildete Produkt

$$(7)\qquad (z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_N)=\frac{1}{b_N}\{b_0+b_1z+\dots+b_Nz^N\}.$$

Als wesentlich wird sich aber nun erweisen, <u>daß wir noch eine geeignete Potenz von b_N als Faktor hinzufügen</u>, was sich früher erübrigte, da $(z-1)\dots(z-n)$ ohnehin ganzzahlig war; wir setzen jetzt also schließlich

$$(8.)\qquad M=\int_0^\infty\frac{e^{-z}z^{\rho-1}\,dz}{(\rho-1)!}\{b_0+b_1z+\dots+b_Nz^N\}^{\rho}\,b_N^{(N-1)\rho-1}.$$

2.) Entwickeln wir nun, genau wie früher, den Integranden von M nach steigenden Potenzen von z, so liefert das niederste Glied, das zu $z^{\rho-1}$ gehört:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}z^{\rho-1}\,dz}{(\rho-1)!}\,b_0^{\rho}\,b_N^{(N-1)\rho-1}=b_0^{\rho}\,b_N^{(N-1)\rho-1},$$

wo das Integral nach der schon oben stets benutzten

Bezeichnung schreiben:

$$(5)\qquad e^{\beta_1} = \frac{M_1+\varepsilon_1}{M},\quad e^{\beta_2} = \frac{M_2+\varepsilon_2}{M} \;\dots\; e^{\beta_\nu} = \frac{M_\nu+\varepsilon_\nu}{M};$$

dabei ist der Nenner M wieder eine gewöhnliche ganze Zahl, die $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu$ sind sehr kleine Brüche, aber die $M_1 \dots M_\nu$ werden nicht mehr ganze rationale, sondern ganze algebraische Zahlen sein, und das gerade ist die gegen früher auftretende Komplikation. Die Summe aller $M_1 \dots M_\nu$ wird aber wiederum eine ganze rationale Zahl darstellen, und zwar werden wir es so einrichten können, daß der erste Summand der Gleichung

$$(6)\qquad \{a_0 M + M_1 + M_2 + \dots + M_\nu\} + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_\nu\} = 0,$$

in die (3) vermöge (5) nach Multiplikation mit M übergeht, eine nichtverschwindende ganze rationale Zahl wird, während der zweite Summand jedenfalls absolut genommen kleiner als 1 ist; das ist genau der früher benutzte Widerspruch, und damit ist die Unmöglichkeit von (6) und (3) gezeigt und unser Beweis geführt. Im einzelnen wird wieder gezeigt, daß $M_1 + M_2 + \dots + M_\nu$ durch eine gewisse Primzahl p teilbar ist, $a_0 \cdot M$ aber nicht, woraus dann in alter Weise das Nichtverschwinden der ersten Summanden in (6) folgt;

Multiplikation aller dieser Gleichungen erhalten wir wiederum eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, die vielleicht einige Wurzeln Null hat und deren übrige Wurzeln die $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ sind; indem wir die den ersteren entsprechende Potenz der Unbekannten weglassen, bekommen wir für die ν Größen β eine ganzzahlige Gleichung genau ν^{ten} Grades mit von 0 verschiedenem konstanten Term:

(4) $b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_\nu z^\nu = 0$, wo $b_0, b_\nu \neq 0$.

Was wir nun beweisen wollen und was nach dem vorangehenden die Transzendenz von π umfaßt, ist dieser spezielle Fall des Lindemannschen Satzes: Eine Gleichung der Form (3) mit ganzzahligen nichtverschwindenden a_0 kann nicht bestehen, wenn die $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ die ν Wurzeln einer Gleichung (4) ν^{ten} Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten sind.

Der Beweis gliedert sich nun genau so, wie der frühere Beweis der Transzendenz von e. Wie wir dort die ganzzahligen Potenzen $e^1, e^2 \ldots e^n$ besonders gut durch rationale Zahlen annähern konnten, wird es sich hier um eine möglichst gute Approximation der in (3) auftretenden Potenzen von e handeln, und wir werden in genau der alten selbst mit einbegriffen, dann ist wegen (1) jedenfalls

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\dots(1+e^{\alpha_n})=0\,.$$

Indem wir ausmultiplizieren erhalten wir:

$$(2)\quad 1+(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\dots+e^{\alpha_n})+(e^{\alpha_1+\alpha_2}+e^{\alpha_1+\alpha_3}+\dots+e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n})+\dots+(e^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_n})=0\,.$$

Nun könnten einige der hier auftretenden Exponenten zufällig Null sein; jedesmal, wenn das eintritt, enthält die linke Summe einen positiven Summanden 1, und alle diese fassen wir mit der bereits auftretenden 1 zu einer ganzen positiven, von Null sicher verschiedenen Zahl a_0 zusammen; die übrig bleibenden von Null sicher verschiedenen Exponenten bezeichnen wir kurz mit $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N$ und schreiben demgemäß statt (2):

$$(3)\quad a_0+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\dots+e^{\beta_N}=0.\ (a_0\neq 0)$$

Nun sind aber die $\beta_1 \dots \beta_N$ Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung. Denn aus der Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten für $\alpha_1 \dots \alpha_n$ kann man in bekannter Weise eine ebensolche Gleichung für die sämtlichen zweigliedrigen Summen $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_3 \dots$ herleiten, ebenso eine solche für die dreigliedrigen $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 \dots$ und so fort, und schließlich ist $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ selbst rational, genügt also einer linearen ganzzahligen Gleichung. Durch können? Das gelang ihm nun in der Tat und zwar lautet der allgemeinste Lindemannsche Satz über die Exponentialfunktion: Eine Gleichung $\sum_{\nu=1\ldots n} a_\nu e^{b_\nu} = 0$ kann nicht bestehen, wenn die a_ν beliebige, die b_ν lauter von einander verschiedene algebraische Zahlen sind. Die Transzendenz von π ist dazu dann nur ein Korollar; denn es besteht bekanntlich die Gleichung $1+e^{i\pi}=0$, und wäre π eine algebraische Zahl, so wäre es auch $i\pi$, und das Bestehen dieser Gleichung würde jenem Lindemannschen Satze widersprechen.

Ich will hier ausführlich nur einen gewissen Spezialfall des Lindemannschen Satzes beweisen, der die Transzendenz von π bereits umfaßt. Ich folge dabei wiederum im Wesen der Sache Hilberts Beweisführung in Bd. 43 der Math. Ann., die gegen Lindemann wesentlich vereinfacht und eine genaue Verallgemeinerung der vorhergehenden Betrachtungen für e ist.

Den Ausgangspunkt bildet die Relation:

$$(1.) \qquad 1+e^{i\pi}=0$$

Genügt nun π irgend einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, so genügt auch $i\pi$ einer solchen Gleichung; es seien nun $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die sämtlichen Wurzeln dieser letzten Gleichung, $i\pi$

hat, so können wir vermöge des Faktors $\frac{c^{p-1}}{(p-1)!}$ die ganze rechte Seite und damit auch $|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n|$ so klein machen, als wir wollen, insbesondere auch kleiner als 1.

Damit haben wir aber den oben (S. 520) in Aussicht gestellten Widerspruch gegen das Bestehen der Gleichung (3):

$$\{a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n\} + \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} = 0$$

abgeleitet, daß nämlich dann eine nicht verschwindende ganze Zahl vermehrt um einen echten Bruch Null ergeben müßte. Also kann diese Gleichung nicht bestehen und die Transzendenz von e ist bewiesen.

Wenden wir uns nun dem

Beweise der Transzendenz von π

zu, der, wenn auch schwieriger als der vorhergehende Beweis, doch immer noch recht einfach ist. Man muß eben nur – und das ist die Kunst der mathematischen Erfindung – die Sache am richtigen Ende anfassen.

Die Problemstellung Lindemanns war folgende: Bisher ist gezeigt, daß eine Gleichung $\sum_{\nu=1,\dots,n} a_\nu e^{\nu} = 0$ nicht bestehen kann, wenn die a_ν und ν gewöhnliche ganze rationale Zahlen sind; sollte man ähnliches nicht auch für beliebige algebraische a_ν und ν zeigen uns nun mit einem ganz rohen Verfahren begnügen. Es seien G und g_ν die Maxima der absoluten Beträge der Funktionen $z(z-1)\ldots(z-n)$ und $(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-n)e^{-z+\nu}$ im Intervalle $(0,n)$:

$$\left.\begin{array}{l} |z(z-1)\ldots(z-n)| \leqq G \\ |(z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z+\nu}| \leqq g_\nu \end{array}\right\} \text{ für } 0 \leqq z \leqq n$$

Da das Integral einer jeden Funktion absolut nie größer ist, als das Integral ihres Betrages, folgt für jedes ε_ν:

$$(6) \qquad |\varepsilon_\nu| \leqq \int_0^\nu \frac{G^{p-1} g_\nu}{(p-1)!}\,dz = \frac{G^{p-1} g_\nu \cdot \nu}{(p-1)!}$$

Nun sind G, g_ν und ν von p unabhängige feste Zahlen, die im Nenner stehende Fakultät $(p-1)!$ wächst aber bekanntlich schließlich rascher als die Potenz G^{p-1}, oder genauer: für hinreichend große p wird $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ kleiner als jede vorgegebene noch so kleine Zahl. Wir können wegen (6) also, wenn wir nur p genügend groß wählen, tatsächlich auch jedes <u>ε_ν beliebig klein</u> machen.

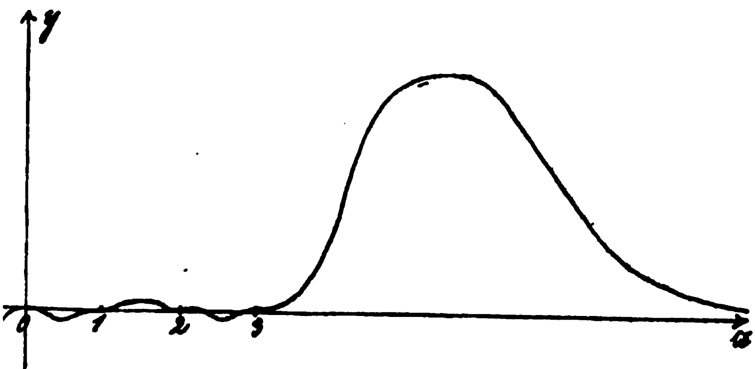
Daraus folgt unmittelbar, daß man auch die Summe von n Termen $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$ beliebig klein machen kann; tatsächlich haben wir:

$$|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n| \leqq |a_1||\varepsilon_1| + |a_2||\varepsilon_2| + \ldots + |a_n||\varepsilon_n|, \text{ und nach (6):}$$

$$\leqq (|a_1|\cdot 1\cdot g_1 + |a_2|\cdot 2\,g_2 + \ldots + |a_n|\cdot n\cdot g_n)\cdot \frac{G^{p-1}}{(p-1)!},$$

und da die Klammer einen festen von p unabhängigen Wert daß wir p beliebig groß werden lassen können, denn die einzigen Bedingungen, denen die Primzahl p bisher unterworfen wurde ($p > n$, $p > a_0$) lassen sich noch durch beliebig große Primzahlen befriedigen.

Machen wir uns zunächst ein geometrisches Bild vom Verlaufe des Integranden; er wird bei $x = 0$ die x-Achse berühren, bei $x = 1, 2 \ldots n$ sie aber immer berühren und schneiden (da p ungerade).



Wie wir bald näher sehen werden, erhebt sich im ganzen Intervalle die Kurve des Nenners $(p-1)!$ wegen nur wenig über die x-Achse, wenn wir nur p hinreichend groß nehmen, und also ist es plausibel, daß das Integral ε_r sehr klein wird. Für $x > n$ wächst der Integrand übrigens wieder beträchtlich und verläuft asymptotisch wie die früher betrachtete Kurve $x^{\rho-1}e^{-x}$ (für $\rho = (n+1)p$); so kommt der mit p außerordentlich rasch wachsende Wert M des ganzen von 0 bis ∞ erstreckten Integrales zu Stande.

Bei der tatsächlichen Abschätzung können wir hier betrachtete M_0, und wir können es ganz analog behandeln. Multiplizieren wir die Faktoren des Integranden aus, so ergibt sich ein Aggregat von Potenzen mit ganzzahligen Koeffizienten, unter denen die niederste ξ^p ist. Das Integral des Zählers ist also eine ganzzahlige Kombination der Integrale

$$\int_0^\infty \xi^p e^{-\xi}\, d\xi, \qquad \int_0^\infty \xi^{p+1} e^{-\xi}\, d\xi \;\dots\; \int_0^\infty \xi^{(n+1)p-1} e^{-\xi}\, d\xi,$$

und da diese nach (5) bez. gleich $p!, (p+1)! \dots$ sind, so ist es gleich $p!$, multipliziert mit einer ganzen Zahl A_ν; *also ist jeder*

$$M_\nu = \frac{p!\, A_\nu}{(p-1)!} = p \cdot A_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

tatsächlich eine ganze durch p teilbare Zahl. Damit im Verein mit dem Resultat von Nr. 2.) sind die Grundlagen für den oben (S. 521) angegebenen Schluss gegeben: *$a_0 M_0 + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ ist gewiss nicht durch p teilbar und daher von Null verschieden.*

4.) Der zweite Teil des Beweises bezieht sich auf die *Summe $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$*, wo nach ($4^b$):

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\}^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!}\, dz,$$

und wir haben nun zu zeigen, dass diese ε_ν durch geeignete Annahme von p *hinreichend klein* werden; zu dem Zwecke machen wir sogleich Gebrauch davon, Nun muß sich M hinsichtlich seiner Teilbarkeit durch p genau so verhalten wie der erste Summand $(-1)^n (n!)^p$. Da p aber Primzahl ist, wird dieser sicher dann nicht durch p teilbar sein, wenn p in keinem einzelnen seiner Faktoren $1, 2, \ldots n$ enthalten ist, und das ist gewiß der Fall, wenn $p > n$ ist. Dieser Bedingung können wir, weil es unendlich viele Primzahlen gibt, tatsächlich noch auf unendlich viele Arten genügen, und wir haben dann erreicht, daß $(-1)^n (n!)^p$ und daher auch M sicher nicht durch p teilbar ist.

Da ja $a_0 \neq 0$ angenommen werden konnte, können wir sofort auch erreichen, daß a_0 nicht durch p teilbar ist, indem wir nur p auch größer als a_0 wählen; das ist nach dem soeben Gesagten ohne weiteres möglich. Dann ist auch das Produkt $a_0 \cdot M$ nicht durch p teilbar, und das erstrebten wir ja zunächst an.

3.) Wir haben nun die in (4^a) (S. 522) definierten Zahlen M_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ zu untersuchen. Nehmen wir den Faktor e^ν unters Integralzeichen, und führen die neue Integrationsvariable $\zeta = z - \nu$ ein, die von 0 bis ∞ läuft, wenn z von ν bis ∞ variiert, so wird

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{(\zeta+\nu)^{p-1}\{(\zeta+\nu-1)(\zeta+\nu-2)\ldots\zeta\ldots(\zeta+\nu-n)\}^p e^{-\zeta}}{(p-1)!}\,d\zeta.$$

Das hat nun eine ganz analoge Form wie das vor-

So ist es verständlich, daß der Inhalt — unser Integral — zwar immer endlich bleibt, aber doch mit wachsendem ρ stark wächst.

2.) Mit dieser Formel können wir nun unser Hermite'sches Integral (4) leicht auswerten. Entwickeln wir seinen Integranden nach dem polynomischen Lehrsatz:

$$\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p = \{z^n + - \dots + (-1)^n n!\}^p$$
$$= z^{np} + - \dots + (-1)^n (n!)^p,$$

wobei immer nur das höchste und niederste (d.h. von z freie) Glied in z hervorgehoben ist, so geht es über in:

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z}\,dz + \sum_{\substack{\rho = p+1, p+2, \dots \\ \dots np+p}} \frac{C_\rho}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz .$$

C_ρ sind *ganzzahlige* Konstante, die sich aus dem oben angewandten polynomischen Satze ergeben. Nun können wir auf jedes dieser Integrale die Formel (5) anwenden und erhalten:

$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\rho = p+1, \dots} C_\rho \frac{(\rho-1)!}{(p-1)!} .$$

Der Summationsindex ρ ist *stets größer als p* und daher ist $\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$ eine ganze Zahl, die noch obendrein p als Faktor enthält, und wir können diesen Faktor aus der ganzen Summe herausziehen:

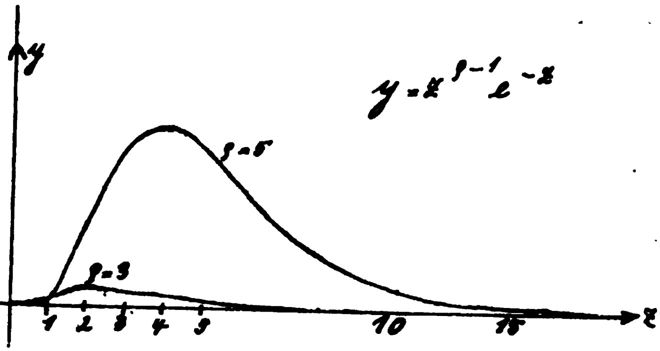
$$M = (-1)^n (n!)^p + p\,\{C_{p+1} + C_{p+2}\cdot(p+1) + C_{p+3}(p+1)(p+2) + \dots\} .$$

und da $\int_0^\infty e^{-z}\,dz = 1$ ist, folgt schließlich

$$(5) \qquad \int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z}\,dz = (\varrho-1)(\varrho-2)\dots 3.\,2.\,1 = (\varrho-1)!$$

Das Integral ist also bei ganzzahligem ϱ eine ganze Zahl, die mit wachsendem ϱ außerordentlich rasch wächst.

Um uns dies Resultat auch *geometrisch anschaulich* zu machen, zeichnen wir uns über einer z-Achse den Verlauf der Funktion $z^{\varrho-1}e^{-z}$ für verschiedene Werte ϱ; dann wird der Integralwert durch den bis ins Unendliche hin unter der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt dargestellt.



Je mehr ϱ wächst, desto enger schließt sich die Kurve bei $z = 0$ der Abszissenachse an, desto rascher aber steigt sie auch von $z = 1$ an in die Höhe; schließlich erreicht sie, wie groß auch ϱ ist, bei $z = \varrho - 1$ ein Maximum, das mit wachsendem ϱ wächst, und sich gleichzeitig weiter nach rechts verschiebt; von da an überwiegt der Faktor e^{-z}, und die Kurve fällt ab, um sich schließlich aufs innigste der z-Achse wieder anzuschmiegen.

Approximation (2) der Potenzen e^r $(r = 1, 2 \dots n)$ erhalten, indem wir das Integrationsintervall des Integrales M. e^r durch den Punkt r zerlegen und demgemäß setzen:

$$(4^a)\quad M_r = e^r \int_r^\infty \frac{z^{\rho-1}\{(z-1)\dots(z-n)\}^{\rho} e^{-z}}{(\rho-1)!}\,dz,$$

$$(4^b)\quad \varepsilon_r = e^r \int_0^r \frac{z^{\rho-1}\{(z-1)\dots(z-n)\}^{\rho} e^{-z}}{(\rho-1)!}\,dz$$

Gehen wir nun an die <u>wirkliche Ausführung des Beweises</u>!

1.) Ich gehe von der aus den Anfängen der Theorie der Γ-Funktion wohlbekannten Formel

$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz = \Gamma(\rho)$$

aus, die wir hier nur <u>für ganzzahliges ρ</u> brauchen, wo <u>$\Gamma(\rho) = (\rho-1)$</u>! ist, und die ich in dieser Beschränkung hier auch ableiten will: Man findet durch Integration nach Teilen:

$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz = \left[-z^{\rho-1} e^{-z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\rho-1) z^{\rho-2} e^{-z}\,dz$$

$$= (\rho-1)\int_0^\infty z^{\rho-2} e^{-z}\,dz.$$

Rechts steht nun wieder ein Integral genau derselben Form wie links, nur daß der Exponent von z verkleinert ist; wendet man diese Formel also wiederholt an, so muß man bei ganzzahligem ρ schließlich auf z^1 kommen, Null ergeben soll; daraus folgt die Unmöglichkeit der Gleichung (1).

Eine wichtige Anwendung wird dabei der Schluß finden, daß eine ganze Zahl, die durch irgend eine bestimmte Zahl nicht teilbar ist, von Null verschieden ist (denn Null ist durch jede Zahl teilbar). Wir werden nämlich zeigen, daß $M_1 \dots M_n$ durch eine gewisse Primzahl p teilbar sind, $a_0 M$ aber sicherlich nicht, also ist $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ nicht durch p teilbar und daher von Null verschieden.

Das Haupthilfsmittel zur Durchführung der so angedeuteten Beweisidee ist nun die Benutzung eines gewissen bestimmten Integrales, das von Hermite in diese Betrachtungen eingeführt wurde, und das wir daher als Hermitesches Integral bezeichnen können; in seiner Bauart liegt der Schlüssel zum ganzen Beweise. Es ist das folgende Integral, das, wie wir sehen werden, tatsächlich einen ganzzahligen Wert hat, und durch das wir M definieren werden:

(4) $$M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\, dz,$$

wo n der Grad unserer angenommenen Gleichung (1), p aber eine später noch näher zu bestimmende Primzahl ist. Daraus werden wir auch die gewünschte der Zahlenlehre nur die elementarsten Teilbarkeitsgesetze voraussetzen, insbesondere, daß jede positive, ganze Zahl auf eindeutige Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann, und daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Der Plan unseres Beweisganges ist dieser: Wir werden ein Verfahren angeben, e und seine Potenzen durch rationale Zahlen ganz besonders gut anzunähern, derart daß

$$(2) \quad e = \frac{M_1+\varepsilon_1}{M}, \; e^2 = \frac{M_2+\varepsilon_2}{M}, \; \dots, \; e^n = \frac{M_n+\varepsilon_n}{M},$$

wo $M, M_1, M_2 \dots M$ ganze Zahlen und $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M} \dots \frac{\varepsilon_n}{M}$ außerordentlich kleine Brüche sind. Dann geht die angenommene Gleichung (1) nach Multiplikation mit M über in:

$$(3) \quad \{a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n\} + \{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n\} = 0.$$

Die erste Klammer der linken Seite ist eine ganze Zahl, und wir werden nachweisen, daß sie sicher nicht Null ist; den zweiten Summanden aber werden wir dadurch, daß wir $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ hinreichend verkleinern, jedenfalls zu einem echten Bruch machen können. Dann haben wir den offenbaren Widerspruch, daß eine ganze von Null verschiedene Zahl $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$, vermehrt um einen von 1 verschiedenen echten Bruch $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$

noch darüber hinaus, daß π und ebenso e transzendent, d.h. überhaupt durch keine irgendwie geartete algebraische Relation mit ganzen Zahlen verknüpft ist. Mit anderen Worten e oder π kann unmöglich Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

sein, wie groß auch die ganzen Zahlen $a_0 \ldots a_n$ und der Grad n sein mögen. Ganze rationale Koeffizienten, das ist dabei die Hauptsache; es genügt auch zu sagen: rationale, da man sie stets durch Multiplikation mit dem Generalnenner auf ganzzahlige zurückführen kann.

Ich gehe nun sogleich zu dem

Transzendenzbeweis von e

über, und schließe mich dabei der wesentlich vereinfachten Darstellung an, die Hilbert in Bd. 43 der mathem. Annalen (1893) gegeben hat.

Es ist zu zeigen, daß die Annahme einer Gleichung

$$(1.)\qquad a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0, \text{ wo } a_0 \neq 0,$$

mit ganzzahligen $a_0 \ldots a_n$ zu einem Widerspruch führt; der wird sich in den einfachsten Eigenschaften der ganzen Zahlen zeigen. Wir werden dabei aus gen sportsmäßiges Interesse an einer Rekordleistung vor, denn für die Anwendungen wird man eine solche Genauigkeit nie brauchen. — Was nun die theoretische Seite angeht, so greift in derselben Periode die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, zuerst in die Untersuchungen ein. Man entdeckt die wunderbare Relation $e^{i\pi} = -1$, und bereitet in der Integralrechnung ein, wie wir sehen werden, wichtiges Hilfsmittel für die endgültige Lösung des Problemes.

Den entscheidenden Schritt zur Erledigung der Aufgabe hat bekanntlich Hermite getan, indem er 1874 die Transzendenz von e bewies. Es gelang ihm aber nicht, auch für π den Transzendenzbeweis zu erbringen; das glückte erst Lindemann im Jahre 1882.

Hier liegt nun eine wesentliche Verallgemeinerung der klassischen Problemstellung vor; dort handelt es sich nur darum, π mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und das kommt, wie wir wissen (vgl. S. 125) analytisch darauf hinaus, π durch eine Folge von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen darzustellen. Nun wird aber nicht nur die Unmöglichkeit dieser Darstellung behauptet, sondern zu erkennen; was von den ersten dieser Versuche erhalten ist, hat Rudio[1)] kürzlich publiziert. Die „Quadratur des Zirkels" gehört aber noch heute zu den populärsten Aufgaben, und unzählige Leute – ich sprach ja schon früher davon – versuchen ihr Heil damit, ohne zu wissen oder zu glauben, daß sie die moderne Wissenschaft längst erledigt hat.

In der Tat sind heute diese alten Probleme vollständig gelöst. Man bezweifelt ja oft, ob die menschliche Erkenntnis überhaupt fortschreiten kann, und es mag wirklich auf manchem Gebiete zweifelhaft sein. In der Mathematik aber gibt es sicherlich Fortschritte, und hier haben wir ein Beispiel davon!

Die Grundlagen, auf der die moderne Lösung dieser Probleme fußt, stammen bereits aus der Zeit von Newton bis Euler. Für die numerisch-approximative Bestimmung von π lieferten die unendlichen Reihen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, die eine allen Ansprüchen genügende Genauigkeit möglich machten. Das weitestgehende Resultat hat da ein Engländer namens Shanks erreicht, der π auf 600 Dezimalen berechnete; dabei liegt wohl nur ein sozusa-

1.) Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates. – Leipzig 1908.

liche Analysis und will nun in einem

Anhang

noch einige *Theorieen der modernen Mathematik* besprechen, auf die schon früher gelegentlich Bezug genommen wurde und über die, wie ich glaube, der Lehrer auch einigermaßen orientiert sein sollte.

Der eine dieser Gegenstände ist das Problem der

I. Transzendenz von e und π.

Das Interesse für die Zahl π stammt – in geometrischer Form – bereits aus dem *Altertum*, und zwar war damals schon der Unterschied zwischen der Aufgabe ihrer *approximativen Berechnung* und derjenigen ihrer exakten *theoretischen Konstruktion* durchaus geläufig; man besaß auch bereits gewisse Grundlagen für die Lösung beider Aufgaben. Die erste hat ja bekanntlich *Archimedes* durch sein Verfahren der *Approximation des Kreises durch ein- und umgeschriebene Polygone* wesentlich gefördert, die zweite spitzte sich bald auf die Frage an, ob man *π mit Zirkel und Lineal konstruieren könne*, und das versuchte man auf alle möglichen Arten, ohne den Grund des ständigen Mißlingens, die Unlösbarkeit der Aufgabe, Mir scheint es äußerst wichtig, daß gerade die Lehramtskandidaten von all dem Kenntnis haben. So wie Sie in die Praxis treten, kommt die populäre Auffassung an Sie heran, und wenn Sie da nicht orientiert sind, und wenn Sie nicht über die anschaulichen Elemente der Mathematik, sowie über ihre lebendigen Beziehungen zu allen Nachbargebieten Bescheid wissen, wenn Sie vor allen Dingen nicht die historische Entwicklung kennen, so verlieren Sie allen Boden unter Ihren Füßen; Sie ziehen sich dann entweder auf den Boden der orthodoxesten Mathematik zurück und werden dann an der Schule nicht verstanden, oder aber Sie unterliegen dem Ansturm, geben das auf, was Sie auf der Hochschule gelernt haben und fallen auch in Ihrem Unterricht der überlieferten Routine anheim. Auf diesem Gebiete der Infinitesimalrechnung gerade ist die Diskontinuität zwischen Schule und Universität, von der ich schon öfters sprach, am größten; ich hoffe, daß meine Darlegungen zu ihrer Beseitigung beitragen und Ihnen für Ihre spätere Lehrpraxis ein nützliches Rüstzeug an die Hand geben.

Damit verlasse ich die eigentliche herkömmüberhaupt, die Differenzenrechnung ganz den praktischen Rechnern, die sie anwenden müssen, insbesondere den Astronomen, und der Mathematiker erfährt nichts von ihr.

Im Anschluß hieran möchte ich meine Darlegungen über Infinitesimalrechnung nun überhaupt abschließen, indem ich noch einmal 4 Punkte aufführe, durch deren Hervorhebung sie sich von den üblichen Darstellungen der Lehrbücher besonders unterscheiden:

1.) Veranschaulichung abstrakter Betrachtungen durch anschauliche konkrete Figuren (Näherungskurven bei Fourierschen und Taylorschen Reihen)

2.) Betonung der Verbindung mit den Nachbargebieten, wie der Differenzen- und Interpolationsrechnung, und schließlich auch den Untersuchungen der Philosophen.

3.) Hervorhebung des geschichtlichen Werdeganges.

4.) Vorführung einiger Proben der populären Literatur zur Kennzeichnung der Verschiedenheit der hiervon beeinflußten Anschauungen des großen Publikums von denen der Fachmathematiker.

zuerst 1869 in Paris erschien; er wurde 1884 von A. Harnack in Deutsche übersetzt und gehört seitdem auch bei uns zu den verbreitetsten Lehrbüchern. Durch die Aufeinanderfolge verschiedener Bearbeiter waren manche Ungleichmäßigkeiten hineingekommen; die vor kurzem erschienene 3. Auflage [1] ist aber von G. Scheffers in Charlottenburg einer durchgreifenden Neubearbeitung unterzogen und wieder zu einem einheitlichen Werke abgeglichen worden. Ich nenne noch gern ein ganz neues französisches Buch, den zweibändigen Cours d'analyse mathématique von Goursat [2], der nach vielen Richtungen reichhaltiger als Serret ist, und insbesondere auch eine große Reihe ganz moderner Entwicklungen enthält; dabei ist er recht lesbar geschrieben.

In allen diesen modernen Lehrbüchern geht der Differentialquotient und Integral durchaus wieder auf den Grenzbegriff zurück, von Differenzenrechnung und Interpolation ist überhaupt nicht mehr die Rede; so mag man denn freilich die Dinge schärfer sehen, aber tauscht dafür – wie beim Mikroskop – eine beträchtliche Verengung des Gesichtskreises ein. So überläßt man jetzt

1.) J. A. Serret und G. Scheffers, Lehrb. der Diff.- u. Integralrechnung. Bd. I. II. Leipzig 1906/1907.
2.) Paris 1902 – 1907.

den Umweg, wie ein ganz selbständiger, übrigens sehr ausführlicher Darstellung bisweilen im dritten Bande zu bringen, ohne daß gedankliche Annahmen vorwärts zur Differentialrechnung führten.

Dieser „großе Lacroix" ist historisch besonders bedeutsam als eigentliches Quellenwerk der vielen im 19. Jahrhundert entstandenen Lehrbücher der Infinitesimalrechnung; in erster Linie ist hier Lacroix' eigentliches Lehrbuch, der sog. „kleine Lacroix"[1] zu nennen.

Seit den zwanziger Jahren des Jahrhunderts sind diese Lehrbücher natürlich neben Lacroix auch durch die in Cauchys Werken wieder zu Ehren gekommene Grenzmethode stark beeinflußt. Es kommen da zunächst die vielen französischen Lehrbücher in Betracht, die meist als Cours d'analyse de l'école polytechnique auf den dortigen Hochschulunterricht zugeschnitten waren. Von ihnen hängen auch direkt oder indirekt die deutschen Lehrbücher, mit alleiniger Ausnahme vielleicht von Schlömilch, ab. Ich will aus dieser Menge von Büchern hier nur Sturm's Cours de calcul différentiel et intégral hervorheben, der

1.) Traité élémentaire du calcul diff. et intégr. 2 Bd. Paris 1797.

vorlegen, der ganz auf Lagrangeschem Boden stehend alle damals bekannten Tatsachen der Infinitesimalrechnung zusammenfaßt, den Traité du calcul différentiel et du calcul intégral von Lacroix.[1] Als charakteristische Probe aus diesem Werke gebe ich die Definition des Differentialquotienten (I, pg. 145):

Eine Funktion $f(x)$ ist definiert durch eine Potenzreihe; durch Umordnung mit Hülfe des binomischen Satzes gewinnt man:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \ldots$$

Nun bezeichnet Lacroix einfach das in h lineare Glied dieser Reihe als $df(x)$, und indem er für h selbst dx schreibt, hat er für den Differentialquotienten, oder – wie er auch sagt – Differentialkoeffizienten:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

So ist diese Formel auf eine vollständig veräußerlichte, – allerdings nicht angreifbare Weise herausgebracht. – In diesen Gedankenkreisen konnte Lacroix natürlich die Differenzenrechnung als Ausgangspunkt nicht mehr benutzen; sie erscheint ihm aber doch für die Praxis zu wichtig, als daß er sie weglassen wollte, und so ergreift er dann

---

[1] 3 Bd. Paris 1797–1800. (2. ed. 1810–1813).

halten; so entstehen ja sehr häufig Irrtümer. Erst später ging man wieder auf Taylor zurück und benannte nun wenigstens die allgemeine Form nach ihm. – Es ist schwer, wenn nicht gar unmöglich, gegen solche einmal fest eingenistete Absurditäten anzukämpfen; man kann immer nur in dem kleinen Kreis derer, die historische Interessen besitzen, Aufklärung verbreiten.

Ich schließe hier gern einige

3.) <u>historische und paedagogische Betrachtungen</u>

an. Ich bemerke zuerst, daß das von Taylor geknüpfte Band zwischen Differenzen- und Differentialrechnung noch lange Zeit gehalten hat: Noch in den analytischen Entwicklungen <u>Eulers</u> gehen beide Disziplinen stets Hand in Hand und die Formeln der Differentialrechnung erscheinen stets als Grenzfälle ganz elementarer Beziehungen, die in der Differenzenrechnung statthaben. Diese so naturgemäße Verbindung wird erst durch die wiederholt erwähnten formalen Definitionen des Lagrangeschen Derivationskalkuls aufgehoben. Ich möchte Ihnen hier ein Sammelwerk aus dem Ende des 18. Jahrhunderts a = 0 entstehende Spezialfall der Taylorschen Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

als Maclaurinsche Reihe selbständig aufgeführt, und manch' einer mag denken, daß die praezise Unterscheidung beider Reihen etwas sehr Wichtiges sei. Daß mathematisch nichts hinter dieser Unterscheidung steckt, sieht jeder sofort, der nur etwas von der Sache versteht; weniger bekannt ist, daß sie auch historisch ein vollkommener Unsinn ist. Da hat nämlich die zweifellose Priorität Taylor mit seinem allgemeinen Satze in der soeben angedeuteten Herleitung. Obendrein hebt er aber noch ausdrücklich an einer späteren Stelle seines Buches (pag. 27) die spezielle Gestalt der Reihe für a = 0 hervor und bemerkt, daß man sie mit Hilfe der heute sogenannten Methode der unbestimmten Koeffizienten auch direkt aufstellen kann. Diese Ableitung hat nun Maclaurin 1742 in seinem schon früher (S. 464) genannten „Treatise of fluxions" übernommen [1], indem er aber ausdrücklich Taylor zitiert und nicht den mindesten Anspruch erhebt, etwas Neues zu bringen. Aber das Zitat hat man wahrscheinlich nicht beachtet, und den Verfasser des Lehrbuches auch für den Urheber des Satzes ge-

1) Edinburgh 1742. Vol. II. pag. 610.

faktoren von Δx natürlich auch verschwinden. Aber weiterhin kommen mit wachsendem n noch Glieder in immer wachsender Anzahl, die Faktoren $x - a - k\Delta x$ mit immer wachsenden Werten k enthalten, und man hat ohne weiteres gar kein Recht, diese alle ebenso zu behandeln, wie die ersten, und gar zu schließen, daß sie in eine konvergente Reihe übergehen.

Hier operiert also Taylor im Grunde mit unendlich kleinen Größen (Differentialen) in sozusagen noch viel <u>leichtsinnigerer</u> Weise als es die Leibnizianer jemals taten; es ist interessant sich zu vergegenwärtigen, daß er als ganz junger Mann von 29 Jahren noch unter den Augen Newtons von dessen Grenzmethode abwich. Freilich gelang ihm dadurch auch diese Entdeckung allerersten Ranges.

Eine ausgezeichnete kritische Darstellung der ganzen Entwicklung dieses Theorems finden Sie übrigens in <u>Alfred Pringsheims</u> Arbeit „<u>Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes</u>".[1] Ich möchte hier noch über die <u>übliche Unterscheidung</u> der <u>Taylorschen und Maclaurinschen Reihe</u> sprechen. Bekanntlich wird in allen Lehrbüchern der für

1) Bibliotheca mathematica (3. Folge) I. (1900) pag. 433–479.

einem jeden Grenzübergang nur mit dem ernstesten Gesicht gegenüberzutreten, und würden daher einen direkten Beweis des Taylorschen Satzes dieser Verknüpfung mit der Differenzenrechnung vorziehen.

Ich muß hier aber hervorheben, daß die *geschichtliche Quelle der Entdeckung des Taylorschen Satzes tatsächlich die Differenzenrechnung* ist. Ich erwähnte schon, daß ihn Brook Taylor in seinem „*Methodus incrementorum*" 1) zuerst aufgestellt hat; er leitet dort zunächst die Newtonsche Formel her, natürlich ohne Restglied, und läßt in ihr dann gleichzeitig $\Delta x = 0$ und $n = \infty$ werden; dann erhält er richtig aus ihren ersten Gliedern die ersten Glieder seiner neuen Reihe:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\frac{df(a)}{dx} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2} + \ldots,$$

deren Fortsetzung nach demselben Gesetz ins Unendliche ihm nun selbstverständlich ist, — ohne daß er im Mindesten auf ein Restglied oder auf Konvergenzbetrachtungen eingeht. Hierin liegt nun tatsächlich ein *Grenzübergang von unerhörter Kühnheit*. In den ersten Gliedern, wo $x-a = \Delta x$, $x-a = 2\Delta x$ ... vorkommt, ist ja allerdings keine Schwierig*keit weiter*, da mit $\lim \Delta x = 0$ diese endlichen Viel-

1) Londini 1715, pag. 21—23.

Schmiegungsparabeln. Läßt man nämlich, bei festem x, a und n, Δx gegen Null konvergieren, so gehen, da ja $f(x)$ n-mal differenzierbar sein sollte, die in (4) auftretenden $n-1$ Differenzenquotienten in die entsprechenden Differentialquotienten über:

$$\lim \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a), \quad \lim \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} = f''(a) \text{ etc.}$$

Daher muß auch der Faktor $f^{(n)}(\xi)$ des letzten Gliedes rechts einen bestimmten Grenzwert haben, der wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ wieder ein Mittelwert $f^{(n)}(\xi)$ ist und wir erhalten in der Tat genau:

$$\underline{f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)} \quad (a \leq \xi \leq x).$$

Damit haben wir den *Taylorschen Satz mit Restglied vollständig bewiesen und ihn zugleich der allgemeinen Lehre von der Interpolation in schönster Weise eingeordnet*.

Mir scheint diese Ableitung des Taylorschen Satzes, die ihn in einen größeren Zusammenhang sehr einfacher Fragen bringt und den Grenzübergang äußerst glatt erledigt, wohl die *beste überhaupt mögliche* zu sein. Aber nicht alle Mathematiker, denen diese Betrachtungen geläufig sind – merkwürdiger Weise sind sie aber vielfach und selbst vielleicht bei den Verfassern von Lehrbüchern noch unbekannt – denken so; sie sind gewohnt,

... $x + (n-1)\Delta x$, x enthaltenden Intervalle ist. Diese Formel ist nun aber für die Anwendungen geradezu unentbehrlich. Ich habe auf die *lineare Interpolation bei Benutzung der Logarithmentafel* schon hingewiesen; für $f(x) = \log x$ und $n = 2$ ergibt (5):

$$\log x - \log a + \frac{x-a}{1!}\,\frac{\Delta \log a}{\Delta x} = \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\cdot\frac{-M}{\xi^2},$$

(denn es ist $\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$, wenn M der Modulus des Logarithmensystems), und wir haben so einen Ausdruck für den Fehler, den wir bei linearer Interpolation zwischen den beiden der Tafel zu entnehmenden Logarithmen von a und $a + \Delta x$ machen. Speziell hat dieser Fehler verschiedenes Zeichen je nachdem x zwischen a und $a + \Delta a$ oder außerhalb liegt. Diese Formel sollte doch eigentlich jeder kennen, der mit Logarithmentafeln zu tun hat!

Ich will hier auf die Anwendungen nicht mehr weiter eingehen, sondern auf die *große Analogie zwischen der Newtonschen Interpolationsformel und der Taylorschen Formel Ihre Aufmerksamkeit lenken.* Diese Analogie hat einen tatsächlichen Untergrund: *Man kann aus der Newtonschen Formel den Taylorschen Satz mit Restglied in einfachster Weise durchaus exakt ableiten*, ganz entsprechend dem Grenzübergange von Interpolations- zu wertsatzes an, die sich durch wiederholte Anwendung des gewöhnlichen Theorems (S. 465) ergibt: *Verschwindet eine samt ihren ersten n Differentialquotienten stetige Funktion an $n+1$ Stellen, so verschwindet ihr n^{ter} Differentialquotient an mindestens einer Stelle des alle Nullstellen enthaltenden Intervalles.* Also gibt es, sofern $f(x)$ und daher auch $F(x)$ gleichfalls n stetige Ableitungen hat, eine Stelle ξ zwischen den äußersten der Werte $a_1, \ldots a_n, x$, so daß

$$F^{(n)}(\xi) = 0;$$

nun ist aber

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \psi(x),$$

da das Polynom $(n-1)^{ten}$ Grades P die n^{te} Ableitung 0 hat, und von dem letzten Summanden nur das höchste Glied $\frac{1}{n!}x^n \cdot \psi(x)$ eine nicht verschwindende n^{te} Ableitung liefert. Also haben wir schließlich

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \psi(\xi) = 0, \text{ oder } \psi(\xi) = f^{(n)}(\xi),$$

und das gerade war zu beweisen.

Ich gebe nun speziell die *Newtonsche Interpolationsformel* mit ihrem *Restglied* ausdrücklich an:

$$(5) \quad \underline{f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots}$$
$$\underline{+ \frac{(x-a)\ldots(x-a-(n-1)\Delta x)}{n!} f^{(n)}(\xi),}$$

wo ξ ein Mittelwert in den die $n+1$ Punkte $a, a+\Delta x$

mäßig:

$$R(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}\,\psi(x).$$

Das Heranziehen des Faktors $n!$ erweist sich als bequem; es zeigt sich dann nämlich, daß in völliger Analogie mit dem Restgliede der Taylorschen Reihe $\psi(x)$ gleich dem Werte der n^{ten} Ableitung von $f(x)$ an einer irgendwie zwischen den $n+1$ Punkten $a_1, a_2 \dots a_n, x$ gelegenen Stelle ξ ist. Diese Behauptung, daß die Abweichung der $f(x)$ vom Polynom $(n-1)^{ter}$ Ordnung von dem Gesamtverlauf der Funktion $f^{(n)}(x)$ abhängt, wird ganz plausibel, wenn man bedenkt, daß $f(x)$ im Falle identisch verschwindenden $f^{(n)}(x)$ gleich jenem Polynom wird.

Was nun den Beweis dieser Restformel betrifft, so gelingt er durch folgenden Kunstgriff: Man bilde als Funktion einer neuen Variablen z:

$$F(z) = f(z) - P(z) - \frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}{n!}\,\psi(x),$$

wobei man also in $\psi(x)$ die Variable x als Parameter stehen läßt. Nun ist $F(a_1) = F(a_2) = \dots = F(a_n) = 0$, da ex definitione $f(a_\nu) = P(a_\nu)$. Ferner ist auch $F(x) = 0$, da für $z = x$ der letzte Summand in $R(x)$ übergeht und die rechte Seite wegen (4) verschwindet. Wir kennen also $n+1$ Nullstellen $z = a_1, a_2 \dots a_n, x$ von $F(z)$. Nun wenden wir eine erweiterte Form des Mittel-

In der Tat ist das einmal ein Polynom $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in x; weiter aber reduziert sich für $x = a$ y auf $f(a)$, für $x = a + \Delta x$ fallen alle Glieder vom zweiten an fort und es bleibt $y = f(a) + \Delta f(a)$, was nach (2) gerade $f(a + \Delta x)$ ist und so geht das fort: Die Tabelle (2) ergibt, daß das Polynom an allen n Stellen gerade die richtigen Werte annimmt.

Wollen wir eine dieser Interpolationsformeln nun aber wirklich mit Vorteil anwenden, so müssen wir etwas über die Genauigkeit wissen, mit der sie $f(x)$ darstellt, d. h. wir müssen eine Restabschätzung kennen. Die hat nun Cauchy 1840 gegeben,[1] und ich möchte sie hier noch ableiten. Es sei x irgend ein Wert zwischen den Werten $a_1, a_2 \dots a_n$ (wir legen die allgemeinere Lagrangesche Formel zu Grunde) oder außerhalb von ihnen (Inter- oder Extrapolation); wir bezeichnen mit $P(x)$ den Wert der durch die Formel gegebenen Interpolationsparabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit $R(x)$ den Rest:

$$(4) \qquad f(x) = P(x) + R(x).$$

Nach der Definition der $P(x)$ verschwindet R sicher für $x = a_1, a_2 \dots a_n$, und wir setzen demge-

1) Comptes Rendus XI pg. 175 ff = Oeuvres, I Ser. T. V. (Paris 1885) pg. 422.

Diese Bezeichnungen sind genau denen der Differentialrechnung analog, nur daß es sich hier um bestimmte endliche Größen handelt und von Grenzprozessen nicht die Rede ist.

Aus den angeschriebenen Definitionen der Differenzen folgt nun unmittelbar für die Werte von f an den successiven äquidistanten Stellen:

$$
(2)\quad \begin{cases}
f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \\
f(x+2\Delta x) = f(x+\Delta x) + \Delta f(x+\Delta x) \\
\qquad = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x) \\
f(x+3\Delta x) = f(x+2\Delta x) + \Delta f(\Delta + 2\Delta x) \\
\qquad = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x) \\
f(x+4\Delta x) = f(x) + 4\Delta f(x) + 6\Delta^2 f(x) + 4\Delta^3 f(x) + \Delta^4 f(x);
\end{cases}
$$

in dieser einfachen Weise drücken sich auch weiter die Werte an äquidistanten Stellen durch die successiven Differenzen an der ersten Stelle x aus, wobei die Binomialkoeffizienten als Faktoren eingehen.

Nun lautet die Newtonsche Formel für die an den n äquidistanten Punkten

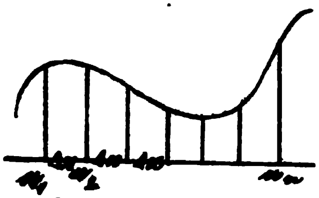
$$x_1 = a,\quad x_2 = a + \Delta x \;\ldots\; x_n = a + (n-1)\Delta x$$

gehörige Interpolationsparabel $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die also daselbst mit $f(x)$ gleiche Ordinaten hat:

$$
(3)\quad y = f(a) + \frac{x-a}{1!}\,\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\,\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\ldots(x-a-(n-2)\Delta x)}{(n-1)!}\,\frac{\Delta^{n-1} f(a)}{\Delta x^{n-1}}
$$

mal ist jeder Summand von y und daher y selbst ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x, und dann verschwinden für $x = x_1$ beispielsweise alle Brüche vom zweiten an, während der erste 1 wird, so daß wir $y = f(x_1)$ erhalten; ebenso wird $y = f(x_2)$ für $x = x_2$ etc.

Aus dieser Formel ergibt sich durch Spezialisierung die Newtonsche Formel, die historisch freilich wesentlich älter ist. Sie bezieht sich auf den Fall, daß die gegebenen Abscissen $x_1 \ldots x_n$ äquidistant sind. Hier ist dann die



Bezeichnungsweise der Differenzenrechnung sehr von Vorteil und sie wollen wir daher zunächst einführen.

Δx sei irgend ein Zuwachs von x und $\Delta f(x)$ der entsprechende Zuwachs von $f(x)$, so daß

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

Nun ist $\Delta f(x)$ wiederum eine Funktion von x, die bei Veränderung von x um Δx eine bestimmte Differenz besitzen wird, die „zweite Differenz $\Delta^2 f(x)$":

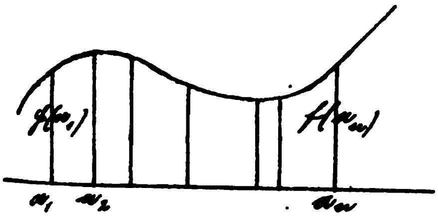
$$\Delta f(x+\Delta x) = \Delta f(x) + \Delta^2 f(x),$$

und ebenso setzen wir weiterhin

$$\Delta^2 f(x+\Delta) = \Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x), \text{ u. s. f.}$$

zusammenrücken. Freilich ist das bei der Ersetzung der Kurve durch diese Schmiegungsparabeln das Wort „Interpolation" im eigentlichen Sinne nicht mehr am Platze, aber man wird ja auch stets das „*Extrapolieren*" in die Aufgabe der *Interpolation* mit einschließen; man wird z. B. die Sekante nicht nur *zwischen* ihren Schnitten sondern auch *außerhalb* mit der Kurve vergleichen. Daher erscheint für das ganze Verfahren das umfassende Wort *Approximation* wohl zweckmäßiger.

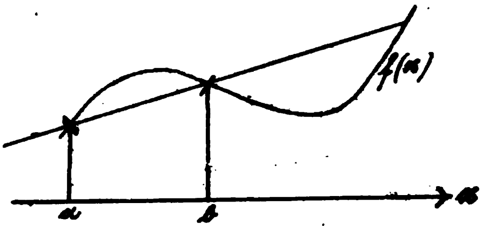
Ich will nun die *wichtigsten Interpolationsformeln* angeben. Wir wollen zunächst die Parabel



$(n-1)^{ter}$ Ordnung bestimmen, die die Funktion in n willkürlich angenommenen Punkten $x_1, x_2 \dots x_n$ schneidet, d. h. deren Ordinaten in diesen Punkten gleich $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)$ sind. Diese Aufgabe wird nun gelöst durch die *Lagrangesche Interpolationsformel*:

$$(1) \quad y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} f(x_2) + \dots;$$

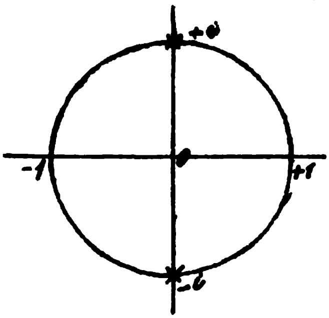
es treten so im ganzen n Glieder mit den Faktoren $f(x_1)$, $f(x_2) \dots f(x_n)$ auf, und im Zähler fehlen der Reihe nach die Faktoren $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, $\dots (x-x_n)$. Die Richtigkeit dieser Formel kann man sofort verifizieren: Ein-von vornherein gegebenen Punkte schneiden und die Frage ist wieder, wie weit diese „Interpolationsparabel" eine leidliche Annäherung gibt. Im einfachsten Falle heißt das also, daß man die Kurve nicht mehr durch ihre Tangente, sondern durch eine Sekante ersetzt; analog wird man weiterhin die quadratische Parabel durch 3 Punkte der gegebenen Kurve, die kubische durch 4, und so fort diskutieren.



Diese Fragestellung der Interpolation ist durchaus naturgemäß und wird ungeheuer oft, z. B. bei der Benutzung numerischer Logarithmentafeln von jedermann angewendet. Denn da nimmt man gerade an, daß die Logarithmenkurve zwischen 2 der in der Tafel angegebenen Werte geradlinig verläuft und interpoliert linear in der bekannten durch die Einrichtung der „Differenzentäfelchen" erleichterten Weise; wird das nicht scharf genug, so wendet man wohl auch quadratische Interpolation an.

Von dieser allgemeinen Aufgabe ist nun die Bestimmung der Schmiegungsparabeln beim Taylorschen Satz ein spezieller Fall, indem einfach die Schnitte der Interpolationsparabeln in einem Punkt

Unser Beispiel arc tg x hat nun bekanntlich $x = \pm i$ zu singulären Stellen, und der Konvergenzkreis der Entwicklung nach Potenzen von x ist daher der Einheitskreis um $x = 0$; die Konvergenz muß also bei $x = \pm 1$ aufhören, da die reelle Achse an diesen Stellen den Konvergenzkreis verläßt.

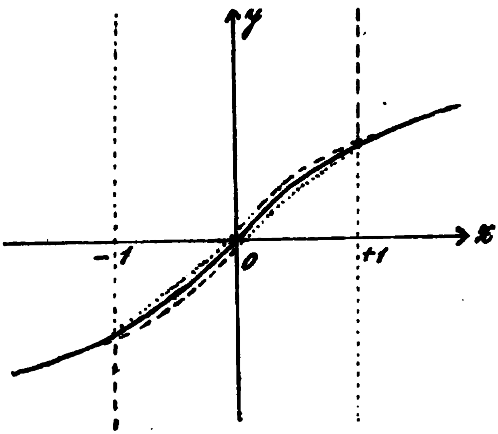


Was endlich die Konvergenz der Reihe auf dem Einheitskreise selbst angeht, so muß ich mich hier mit einem Hinweis begnügen, der an den früher angedeuteten Zusammenhang von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen anknüpft: sie hängt davon ab, ob der reelle und der imaginäre Teil der Funktion auf dem Konvergenzkreise mit den Singularitäten, die er daselbst notwendig besitzt, in eine konvergente trigonometrische Reihe entwickelt werden kann oder nicht.

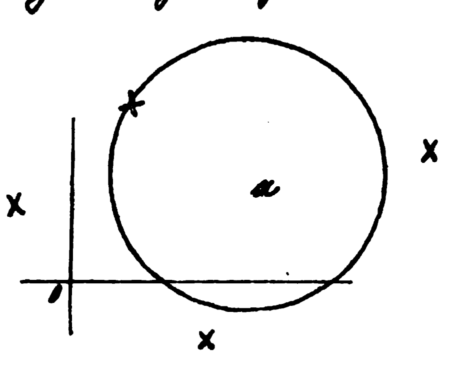
Ich möchte nun den Taylorschen Satz dadurch beleben, daß ich seine Beziehungen zu den Problemen der Interpolation und Differenzenrechnung auseinandersetze. Auch dort betrachtet man nämlich die Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Parabel zu approximieren; statt sich ihr aber in einem Punkte möglichst gut anzuschmiegen, soll sie sie in einer Anzahl mehr Platz greifen. Die Taylorsche Entwicklung einer für alle reellen x regulär verlaufenden Kurve von $\operatorname{arc\,tg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

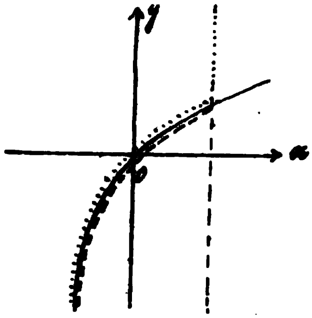
konvergiert nur im Intervalle $(-1, +1)$, und die Näherungsparabeln konvergieren alternierend gegen den gestrichelten und den punktierten Zug. Das plötzliche Aufhören der Konvergenz an den durchaus regulären Stellen $x = \pm 1$ ist hier bei Beschränkung auf reelle Variable durchaus nicht mehr zu verstehen.



Die Aufklärung ist erst in dem großen Theoreme vom Konvergenzkreis enthalten, das die schönste funktionentheoretische Leistung Cauchys ist; markiert man sich alle singulären Stellen der analytischen Funktion $f(x)$ in der komplexen x-Ebene, so konvergiert die zur Stelle $x = a$ gehörige Taylorsche Reihe der Funktion $f(x)$ im Innern desjenigen Kreises um a, der durch den nächsten singulären Punkt geht, und sie konvergiert für keine Stelle außerhalb dieses Kreises.



bei den trigonometrischen Reihen, auch nach den *Grenzwerten fragen, denen die Annäherungsparabeln als Kurven aufgefaßt zustreben*; die können ja bei $x = \pm 1$ nicht so plötzlich abbrechen. Für $\log(1+x)$ ist nun diese Grenzkurve hier skizziert, und zwar haben die geraden und ungeraden Parabeln für sich verschiedene Grenzlagen, die jedesmal aus der Logarithmuskurve zwischen -1 und $+1$ und dem bei $x = +1$ ansetzenden unteren bezw. oberen Stück der Vertikalen $x = +1$ besteht. Ähnlich ist es in den andern drei Fällen.



Die theoretische Betrachtung der Taylorschen Reihe findet ihre Vollendung erst beim *Uebergang zu komplexen Variablen*, denn dann kann man erst das plötzliche *Aufhören der Konvergenz der Potenzreihen* an ganz regulären Stellen der Funktion verstehen. In unseren 4 Beispielen freilich mag man diese Erscheinung an der Stelle $x = +1$ hinreichend damit erklärt finden, daß man sagt, eine Reihe kann nach rechts nicht weiter konvergieren, als nach links, und links muß an der Stelle $x = -1$ die Konvergenz wegen der Singularität aufhören. Diese Überlegung kann aber bereits im folgenden Falle nicht stellbar ist also:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Die Frage des Überganges zur unendlichen Reihe ist nun unmittelbar darauf reduziert, ob dieses $R_n(x)$ mit unendlich wachsendem n den Limes 0 hat, oder nicht.

Für unsere Beispiele entnimmt man hieraus, wie Sie gleichfalls überall nachlesen können, daß zunächst bei 5.) und 6.) die unendliche Reihe für alle x konvergiert. Bei 1.) bis 4.) ergibt sich, daß die unendliche Reihe zwischen -1 und $+1$ gegen die Originalfunktion konvergiert, außerhalb dieses Intervalles aber divergiert. Für $x = -1$ haben wir im Falle 2.) Konvergenz gegen den Funktionswert, bei 1.) 3.) 4.) wird der Grenzwert der Reihe unendlich ebenso wie der Funktionswert, so daß man eigentlich auch von Konvergenz reden könnte; man gebraucht aber traditionell dieses Wort nicht bei Reihen mit bestimmt unendlichem Grenzwerte. Für $x = +1$ endlich haben wir Konvergenz in den ersten beiden, Divergenz in den letzten beiden Beispielen. All das steht in schönster Übereinstimmung mit den Ergebnissen unserer Figuren.

Wir können nun aber, wie schon ähnliche

brauchbare Annäherungen an die Originalkurve darstellen. Besonders anschaulich sehen Sie bei sin x, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.

Ich bemerke, daß das Zeichnen solcher Kurven in ganz einfachen Fällen vielleicht auch für die Schule geeigneten Stoff darstellt.

Nachdem wir so Erfahrungsmaterial gesammelt haben, müssen wir an die mathematische Betrachtung gehen. Wir haben da zunächst die praktisch äußerst wichtige Frage nach der Genauigkeit, mit der allgemein die n^{te} Schmiegungsparabel die Originalkurve darstellt (Restabschätzung), und daran schließt sich naturgemäß der Übergang zu unendlichen an: Kann man durch eine unendliche Potenzreihe die gegebene Kurve nicht genau darstellen?

Es wird hier genügen, wenn ich nur den geläufigsten Satz über den Rest

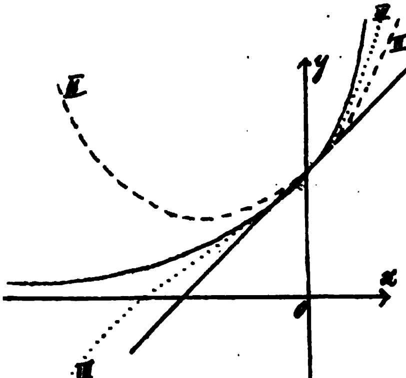
$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\}$$

angebe; seine Ableitung finden Sie in allen Büchern und ich komme überdies späterhin noch vom allgemeinen Standpunkte darauf zurück. Es gibt zwischen a und x einen Mittelwert ξ, so daß R_n den-annähern aber doch noch in ihnen mehr und mehr die Originalkurve, indem sie dort auch immer steiler verlaufen. An der symmetrisch gelegenen Stelle $x = +1$ kommen in den ersten beiden Fällen die Schmiegungsparabeln der Originalkurve noch näher und näher; im Falle 3.) aber sind sie abwechselnd gleich 1 und 0, während die Originalkurve selbst gleich $\frac{1}{2}$ wird, und im Falle 4.) endlich haben sie unbegrenzt wachsende abwechselnd positive und negative Werte.

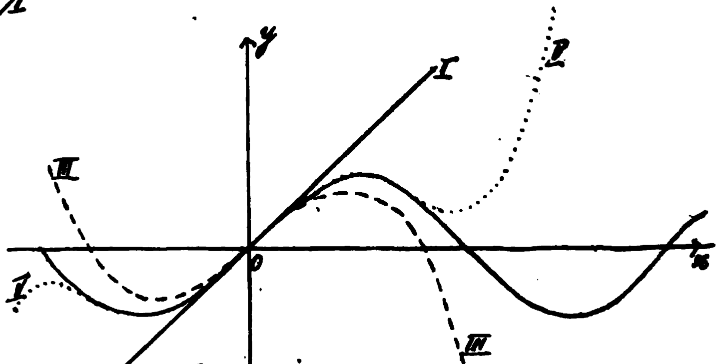
Außerdem habe ich hier noch Skizzen der Schmiegungsparabeln von 2 ganzen transzendenten Funktionen:

5.) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

6.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$



5.) $y = e^x$



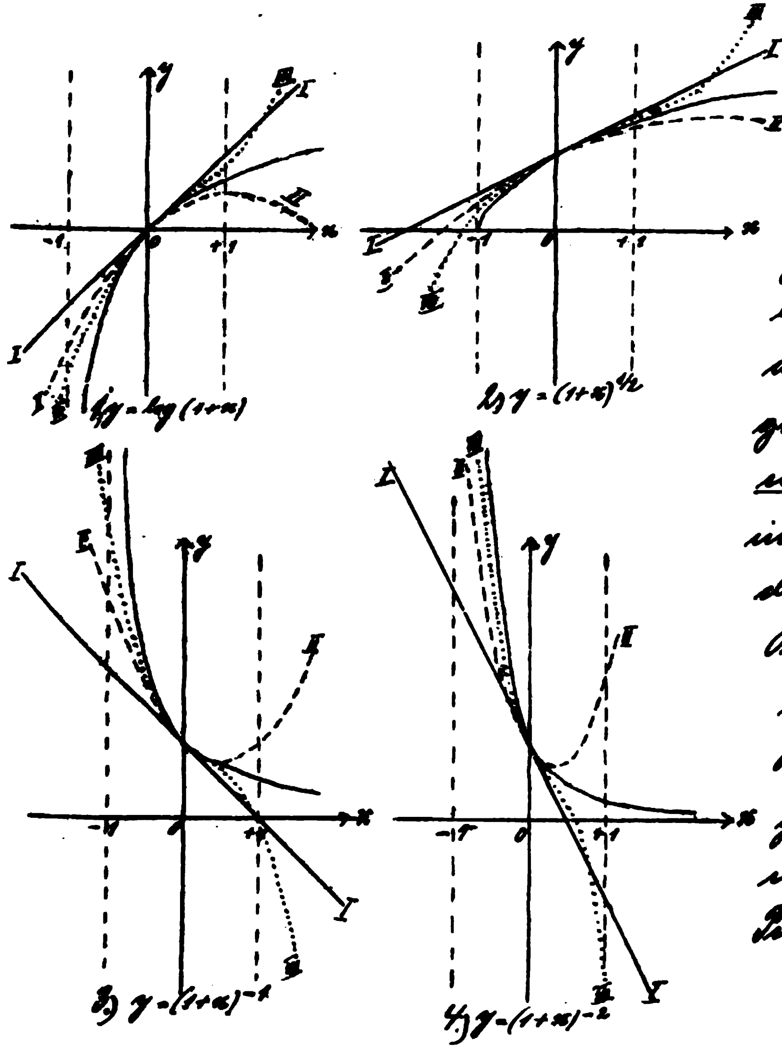
6.) $y = \sin x$

Sie bemerken da, daß die Schmiegungsparabeln mit wachsender Ordnung auf ein immer größeres Stück hin

3.) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots$

4.) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots$

Die successiven Schmiegungsparabeln nähern sich im Intervalle $(-1, +1)$ der Originalkurven mit steigender Ordnung immer besser, biegen aber auffälliger Weise rechts von $x = +1$ in demselben Maße stärker abwechselnd nach oben und unten von ihr ab.



Am singulären Punkte $x = -1$ nehmen in den Fällen 1.) 2.) 3.), wo die Originalfunktion unendlich groß wird, die successiven Schmiegungsparabeln immer größere Werte an; im Falle 2.), wo der dargestellte Ast der Originalfunktion dort mit einer vertikalen Tangente abbricht, greifen sie zwar alle noch über diesen Punkt hinaus, approan der Stelle $x = a$ möglichst eng an die gegebene Kurve anschmiegen, d. h. daß sie Schmiegungsparabeln sind. Die quadratische Parabel z. B. wird also nicht nur in der Ordinate, sondern auch in 1ter und 2ter Ableitung mit $y = f(x)$ übereinstimmen (d. h. oskulieren), die kubische Parabel auch in der dritten Ableitung u. s. f.. Eine einfache Rechnung ergibt dann als analytischen Ausdruck der n ten Schmiegungsparabel:

$$y = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots n}(x-a)^n$$
$$(n = 1, 2 \dots),$$

und das sind gerade die ersten n Glieder der Taylorschen Reihe.

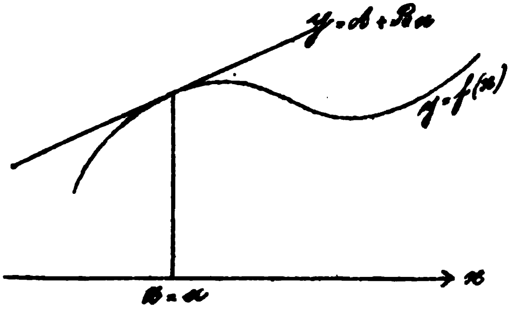
Die Untersuchung, ob und wieweit diese Polynome brauchbare Näherungskurven darstellen, leiten wir wieder wie bei den trigonometrischen Reihen (S. 426) durch eine mehr experimentelle Betrachtung ein; ich kann Ihnen sogleich einige Zeichnungen der ersten Schmiegungsparabeln einfacher Kurven projizieren, die gleichfalls Herr Schimmack entworfen hat. Es sind da zunächst folgende 4 Funktionen mit ihren Schmiegungsparabeln an der Stelle 0 dargestellt, die bei $x = -1$ sämtlich singulär sind:

1.) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$

2.) $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - + \dots$

ich die für die Praxis wichtige endliche Reihe und die anschauliche Erfassung der Sachlage durch Figuren in den Vordergrund stelle. So bekommt alles ein ganz elementares, leicht faßliches Aussehen.

Wir gehen von der Frage aus, ob man den Verlauf einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ nicht auf ein Stück hin durch möglichst einfache Kurven zweckmäßig approximieren kann.



Das Nächstliegende ist, in der Umgegend einer Stelle $x = a$ die Kurve durch ihre geradlinige Tangente

$$y = A + Bx$$

zu ersetzen, wie man das in der Physik und sonstigen Anwendungen tut, so oft man bei einer Reihenentwicklung die höheren Potenzen der unabhängigen Variablen „wegwirft". Man kann nun in ähnlicher Weise noch bessere Approximationen erreichen, wenn man Parabeln 2ter, 3ter ... Ordnung:

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

oder – analytisch gesprochen – Polynome höheren Grades verwendet; diese sind besonders zweckmäßig, da sie sich am bequemsten berechnen lassen. Wir werden diese Kurven speziell so legen, daß sie sich *fänge der Infinitesimalrechnung vollständig besitzt.* Die Hauptsache dabei ist, dem Schüler klar zu machen, daß hier nichts mystisches vorliegt, sondern einfache Dinge, die ein jeder verstehen kann.

Die unabweisbare Notwendigkeit solcher Reformen liegt darin begründet, daß mit ihnen die mathematischen *Begriffsbildungen bezeichnet sind, die heutzutage die Anwendungen der Mathematik auf alle möglichen Gebiete durchaus beherrschen*, und ohne welche alle Studien an der Hochschule, schon die einfachen Studien über Experimentalphysik gänzlich in der Luft schweben. Ich kann mich hier mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, zumal dieser Gegenstand gerade im Klein-Schimmack (zitiert S. 6) ausführliche Berücksichtigung gefunden hat.

Um diese allgemeinen Betrachtungen nun wieder durch etwas Konkretes zu ergänzen, will ich jetzt noch einen speziellen Gegenstand der Infinitesimalrechnung eingehender behandeln, nämlich

2. den Taylorschen Lehrsatz.

Ich werde dabei in ähnlichem Sinne wie früher bei den trigonometrischen Reihen von der usuellen Behandlung in den Lehrbüchern abweichen, indem lich noch – den Schülern Sachen, die Leibniz und Newton besessen haben, unter dem Namen Schellbach vorgeführt!

Lassen Sie mich demgemäß noch charakterisieren, wie sich unsere Reformtendenzen dazu stellen, die ja jetzt in Deutschland wie auch anderswo, besonders in Frankreich, mehr und mehr an Boden gewinnen und hoffentlich den mathematischen Unterricht der nächsten Dezennien beherrschen werden. Wir wollen, daß die Begriffe, die durch die Symbole $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$ bezeichnet werden, mit diesen Bezeichnungen dem Schülern geläufig gemacht werden, und zwar nicht als eine neue abstrakte Disziplin, sondern im organischen Aufbau innerhalb des Gesamtunterrichtes, wobei man von den allereinfachsten Beispielen an langsam aufsteigen möge. So beginne man auf Obertertia und Untersekunda etwa die Funktionen $y = ax + b$ (für bestimmte Zahlwerte a, b) und $y = x^2$ ausführlich zu betrachten, auf Millimeterpapier ~~zu~~ zeichnen, und lasse daran langsam die Begriffe der Steigung und des Flächeninhalts entstehen. Auf der Oberstufe mag man dann die so gewonnenen Kenntnisse resumieren, wobei sich dann von selbst ergibt, daß man die Grundlagen oder den-bis hin zu den Fallgesetzen. Deren Ableitung ist aber nichts als die Integration der Differentialgleichung $\ddot{s} = g$ durch die Funktion $s = \frac{1}{2} g t^2 + a t + b$, wo a, b Integrationskonstanten sind. Diesen Gedankengang muß die Schule unter dem Drucke der Anforderungen der Physik leisten, und die Methoden, die sie anwendet, sind natürlich nur verkleidete, mehr oder weniger exakte Integrationsmethoden.

b.) An vielen norddeutschen Schulen wird Theorie der Maxima und Minima getrieben nach einem Verfahren, das man da nach Schellbach benennt, jenem hervorragenden mathematischen Pädagogen, von dem Sie alle wohl schon gehört haben. Dies Verfahren ist aber nichts, als daß man

$$\lim_{x=x_1}\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right)=0$$

setzt, um die Extrema der Funktion $y = f(x)$ zu erhalten; das ist genau die Methode der Differentialrechnung, nur daß das Wort Differentialquotient nicht gebraucht wird. Schellbach selbst hat dies Verfahren natürlich angewandt, als die Differentialrechnung auf der Schule verboten war, und er diese Ideen doch nicht missen wollte; seine Schüler aber übernahmen die Sache unverändert, benannten sie nach ihm, und so werden heute – es geschieht tatsächlich eine sehr starke Abneigung gegen das Vorbringen der Infinitesimalrechnung auf der Schule verbreitete. Sie gipfelte in den siebziger und achtziger Jahren geradezu in einem behördlichen Verbot dieses Unterrichts, selbst auf den Realanstalten.

Freilich hat das nicht gehindert, wie ich ja schon früher gelegentlich andeutete, daß die *Grenzmethode auf der Schule doch gehandhabt* wurde, wo man sie notwendig brauchte; nur vermied man den Namen, oder glaubte wohl gar gelegentlich auch, daß man etwas anderes treibe. Ich hebe da nur *drei Beispiele* hervor, deren Sie sich wohl auch meist von Ihrer Schulzeit her erinnern werden:

a.) Die bekannte *Berechnung des Kreisumfanges und Inhaltes* durch Approximation des Kreises mittels ein- und umgeschriebener regulärer Polygone ist ja offenbar eine *genaue Integration*. Sie stammt bekanntlich bereits aus dem Altertum, von *Archimedes*, und diesem klassischen Alter hat sie es auch zu verdanken, daß sie sich auf der Schule erhalten hat.

b.) Der physikalische, speziell der mechanische Unterricht braucht notwendig die Begriffe der *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* und ihre Anwendung durch ein eingehendes Studium der ganzen Literatur jener Periode vertieft werden. Viele interessante Hinweise dazu können Sie in dem Vortrage von Max Simon auf der Frankfurter Naturforscherversammlung von 1896: „Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung" finden.

Wenn wir nun zum Schluss noch kurz einen Blick auf die Stellung des Schulunterrichts zu der Infinitesimalrechnung werfen, so sehen wir jenen ganzen historischen Entwicklungsgang sich dort gewissermaßen wiederspiegeln. Wo man früher an der Schule Infinitesimalrechnung trieb, da hatte man – das tritt wenigstens in den Lehrbüchern klar zu Tage und mag wohl im Unterricht nicht anders gewesen sein – keineswegs eine deutliche Vorstellung des exakten wissenschaftlichen Aufbaus mit Hilfe der Grenzmethode, sondern die trat nur mehr oder weniger verschwommen auf, während vielmehr das Operieren mit unendlich kleinen Größen und manchmal auch eine Derivationsrechnung im Sinne von Lagrange im Vordergrunde stand. Natürlich entbehrte dieser Unterricht nicht nur der Strenge, sondern auch der Verständlichkeit, und man kann es wohl verstehen, wenn sich allmäheinem „*Derivationskalkül*". Dauernd befriedigen freilich konnte diese Darstellung nicht. Denn einmal ist der hier verwendete Funktionsbegriff, wie wir ja kürzlich erst ausführlicher darlegten, viel zu eng; vor allem aber machen solche durchaus formalen Definitionen eine tiefere Erfassung des Wesens der Differentialquotienten oder Integrales unmöglich, und tragen dem, was wir *psychologische Momente* nannten, gar keine Rechnung; warum man sich gerade mit so eigentümlich abgeleiteten Reihen beschäftigt, lassen sie gänzlich unerörtert. Endlich aber kommt man ohne Grenzbetrachtungen nur dann aus, wenn man die *Konvergenz dieser Potenzreihen vollkommen außer Acht läßt*; sowie man sie in Rücksicht ziehen will – und das wird zur wirklichen Verwendung der Reihen natürlich nötig –, so muß man doch wieder *ebendenselben Grenzbegriff heranziehen*, zu dessen Vermeidung eigentlich das ganze System ersonnen ist.

Ich schließe damit diese kurze historische Skizze der Entwicklung der Infinitesimalrechnung ab, in der ich mich naturgemäß darauf beschränken mußte, nur immer die bedeutendsten leitenden Männer hervorzuheben. Gewiß müßte sie eigentlich

Leibniz dem Kalkül gegeben hat, aber diesen Kalkül selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht zu konstruieren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergibt er sich nicht ....."

Aus dieser Reaktion gegen die Differentiale ist nun auch der schon mehrfach erwähnte Versuch von Lagrange in seiner Théorie des fonctions analytiques von 1797 zu erklären, der uns nun wieder in neuer Beleuchtung erscheint. Lagrange will da nicht nur die unendlich kleinen Größen, sondern auch jeden Grenzübergang aus der Theorie entfernen, indem er sich auf solche Funktionen beschränkt, die durch Potenzreihen definiert sind:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots,$$

und für diese die „abgeleitete Funktion $f'(x)$" – charakteristischer Weise vermeidet er das Wort Differentialquotient und das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ – durch eine neue Potenzreihe

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \dots$$

rein formal definiert. Konsequent spricht er dann auch nicht von Differentialrechnung, sondern von sophen Berkeley, der in dem kleinen Buche „The analyst" 1) die in der Mathematik seiner Zeit herrschenden Unklarheiten in sehr amüsanter Darstellung angriff. Er geht davon aus, daß man sich gegenüber den Prinzipien und Methoden der Mathematik dieselbe Freiheit der Kritik bewahren müsse, die die Mathematiker hinsichtlich der Geheimnisse der Religion anwenden, und greift dann alle Methoden der neuen Analysis, den Fluxionskalkül sowie das Operieren mit Differentialen, aufs heftigste an; er kommt zu dem Schlusse, daß der gesamte Aufbau der Analysis unklar und durchaus unverständlich ist.

Ähnliche Anschauungen haben sich gerade auch auf philosophischer Seite bis in die Gegenwart erhalten; da kennt man eben immer nur das Operieren mit Differentialen und hat die neuerdings ja zu völliger Strenge ausgebildete Grenzmethode nicht mehr aufgenommen. Als Beispiel lassen Sie mich nur eine Stelle aus Baumanns „Raum, Zeit und Mathematik" 2) aus den sechziger Jahren zitieren: „so verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, die

1) London 1734
2) Bd. II. (Berlin 1869) pag. 55.

vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen, jedenfalls ist bisher von keinem der vielen Leute, die sich mit aktual unendlich kleinen Größen beschäftigen, da etwas Positives geleistet worden.

Zu Ihrer Orientierung bemerke ich noch, daß das Wort „*unendlich klein*" seit Cauchy in den modernen Lehrbüchern in einem anderen Sinne gebraucht wird. Man sagt dann nämlich nie, daß eine Größe unendlich klein *ist*, sondern nur, daß sie unendlich klein *wird*, und meint damit nur eine bequeme Ausdrucksweise dafür, daß sie unbegrenzt gegen Null abnimmt.

Ich muß nun noch der *Reaktion* gedenken, die diese Begründung der Infinitesimalrechnung auf unendlich kleine Größen hervorgerufen hat. Man empfand bald das Mystische, Unbewiesene in diesen Vorstellungen, und daher entstand vielfach das Vorurteil, als sei die Differentialrechnung ein besonderes philosophisches System, das man nicht beweisen, nur glauben könne, oder geradezu grob gesagt – Schwindel. Einer der schärfsten Kritiker in diesem Sinne ist der Philoder soll es nicht erfunden, sondern wie sehr viele seiner Sätze von *Eudoxus von Rhodus* übernommen haben.

Das Studium der nichtarchimedischen Größen, die man besonders als Koordinaten zum Aufbau einer „*nichtarchimedischen Geometrie*" verwendet, verfolgt den Zweck einer tieferen Erkenntnis der Aussagen über Stetigkeit, und gehört zu der großen Gruppe der Untersuchungen über die logische Abhängigkeit der verschiedenen Axiome der gewöhnlichen Geometrie und Arithmetik; man konstruiert dazu stets solche künstliche Zahlsysteme, für die nur ein Teil aller Axiome gilt und schließt dann auf die logische Unabhängigkeit der anderen Axiome von diesen.

Es liegt nun natürlich die Frage nahe, *ob man nicht auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben*, d. h. gewissermaßen auch eine *nichtarchimedische Analysis* aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe wäre da, den Mittelwertsatz $f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \vartheta h)$ aus den hier lichen Zahlen; nur ein wesentlicher Satz fällt fort, der im System der gewöhnlichen reellen Zahlen gilt, daß man zu 2 positiven Zahlen e, a stets eine endliche ganze Zahl n so bestimmen kann, daß $n \cdot e > a$, wie klein auch e und wie groß a sei. Hier ergeben aber die ausgeführten Definitionen unmittelbar, daß ein beliebiges endliches Vielfache $n \cdot \eta$ von η immer noch kleiner ist als jede positive endliche Zahl a und diese Eigenschaft ist es eben, die η als unendlich kleine Größe charakterisiert. Ebenso ist stets $n \cdot \xi < \eta$, d. h. ξ ist eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung, als η. Man nennt nun dieses Zahlensystem ein Nichtarchimedisches, da man jenes Theorem über endliche Zahlen als Archimedisches Axiom bezeichnet, weil Archimedes es als nicht beweisbare resp. nicht weiter bewiesene grundlegende Annahme über die endlichen Zahlen hervorhebt; daß die Gültigkeit dieses Axioms aufhört, ist charakteristisch für das Auftreten aktual unendlich kleiner Größen. Übrigens ist der Name Archimedisches Axiom wie die meisten Personalbezeichnungen historisch ungenau; das Axiom ist schon hundert Jahre vor Archimedes von Euklid hervorgehoben worden, und auch der x-Achse, sondern unendlich viele bestimmt werden, deren Abscissen sich um endliche Vielfache unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnung $\eta, \xi \ldots$ unterscheiden; ein Punkt ist also erst bestimmt, wenn man

$$x = a + b\eta + c\xi + \ldots$$

gibt, wo $a, b, c, \ldots$ gewöhnliche reelle Zahlen sind. Bei Hilbert wird nun die Sache so gewandt, daß durch geeignete axiomatische Festlegungen über diese so eingeführten Größen evident wird, daß man widerspruchsfrei mit ihnen operieren kann. Die Hauptsache ist dabei, die Größenbeziehung von x zu einer zweiten Zahl $x_1 = a_1 + b_1\eta + c_1\xi + \ldots$ geeignet zu bestimmen. Man setzt nun zunächst natürlich fest, daß $x >$ oder $< x_1$, wenn $a >$ oder $< a_1$; ist aber $a = a_1$, so soll der zweite Koeffizient über das Größenverhältnis entscheiden, derart daß $x \gtrless x_1$, wenn $b \gtrless b_1$, und wenn auch $b = b_1$ ist, so sollen die c entscheiden, u. s. f. Sie werden das am klarsten auffassen, wenn Sie mit den hingeschriebenen Buchstaben keinerlei Vorstellung weiter zu verbinden versuchen.

Es ergibt sich nun, daß man mit den Dingen nach diesen und den weiter hinzuzufügenden Regeln ganz analog operieren kann, wie mit endbestimmtere Vorstellungen davon zu bilden, als es durch bloßes Betonen der psychologischen den Grenzbegriff bestimmenden Momente geschieht. Charakteristisch dafür ist eine Formulierung, die soviel ich weiß, von dem Philosophen Hegel herrührt, und die früher vielfach in Büchern und Vorlesungen vorgebracht wurde; sie besagt, daß die *Funktion $y = f(x)$ das Sein der Dinge*, der *Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ aber das Werden der Dinge* darstellt. Sicher liegt etwas ansprechendes darin, nur muß man sich darüber klar sein, daß ein solches Wort die ferneren mathematischen Entwickelungen durchaus nicht fördert, da diese auf präzisen Begriffen aufzubauen haben.

In der neuesten Mathematik sind die *„aktual" unendlich kleinen Größen* in ganz anderem Zusammenhange wieder zu Ehren gekommen, nämlich *in den geometrischen Untersuchungen Veroneses* und dann auch *Hilberts* in seinen *„Grundlagen der Geometrie"* 1). Die Idee dabei ist in aller Kürze die: Man betrachtet eine Geometrie, in der durch eine Angabe $x = a$, wo a eine gewöhnliche reelle Zahl ist, nicht nur *ein* Punkt

1) 2. Aufl. Leipzig 1903.

kurze Darstellung der Infinitesimalrechnung vorausgeschickt wird; der Gedanke ist dabei der, den Naturwissenschaftlern oder Medizinern die auf dem Gymnasium nicht erworbene und für die Physik doch unbedingt notwendige Kenntnis der Infinitesimalrechnung zu vermitteln. Dabei beginnt Wüllner (pg. 31) mit der Erklärung, was eine unendlich kleine Größe da ist, später folgt dann die natürlich schwierigere Erklärung für das zweite Differential d^2x. Lesen Sie einmal diese Einleitung mit dem Auge des Mathematikers, und bedenken Sie dann, welch ein Widersinn darin liegt, daß man auf der Schule Infinitesimalrechnung als zu schwer unterdrückt, daß sie aber dann nach einer solchen nicht nur durchaus unbefriedigenden, sondern auch äußerst schwer verständlichen Darstellung auf 10 Seiten begriffen werden soll!

Der Grund, warum solche Betrachtungen neben der mathematisch exakten Grenzmethode sich vielfach so lange erhalten konnten, ist wohl in einem weitverbreiteten Bedürfnis zu suchen, sich über die abstrakt logischen Formulierungen der Grenzmethode hinaus tiefer <u>in das innerste Wesen der stetigen Größen hineinzufühlen</u>, und sich auch lage dar, was er für die wahre Infinitesimalrechnung hält – ein mystisches Operieren mit den unendlich kleinen Größen; die betr. Kapitel sind mit einem Stern versehen, einem Zeichen, daß sie an Material nichts Neues bringen. Hier werden die Differentiale eingeführt als letzte Teile, die etwa beim fortgesetzten Halbieren einer endlichen Größe in unendlicher nicht angebbarer Anzahl entstehen, und deren jeder „obwohl von der absoluten Null verschieden, doch auch nicht mehr angebbar, sondern eine Infinitesimalgröße, ein Hauch, ein Augenblick ist" – und dann folgt ein englisches Zitat: „Das Infinitesimale ist der Geist einer abgeschiedenen Größe". (pag. 59/60.) Und weiter heißt es an einer anderen Stelle (pg. 76): „Die Infinitesimalmethode ist, wie man sieht, sehr subtil, aber richtig. Sollte dies aus dem bisherigen und dem noch folgenden nicht einleuchten, so liegt dies nur an unserer mangelhaften Darstellung derselben." Es ist sehr interessant, von diesen Erörterungen nähere Kenntnis zu nehmen.

Als Gegenstück dazu lege ich Ihnen noch das verbreitete Lehrbuch der Experimentalphysik von Wüllner[1] vor, in dem im ersten Bande eine

[1] 6. Aufl. Leipzig 1907.

auf philosophischer Seite, aber auch unter den mathematischen Physikern stets Anhänger gehabt. Hier nenne ich als einen der hervorragendsten Poisson, der sich in der Vorrede seines berühmten „Traité de mécanique“[1] in sehr krasser Weise dahin äußert, daß die unendlich kleinen Größen nicht bloß ein Mittel zur Forschung sind, sondern durchaus wirklich existieren.

5.) Wahrscheinlich durch die philosophische Tradition ist diese Auffassung in die populäre Lehrbuchliteratur übergegangen und spielt da noch heute eine große Rolle. Als Beispiel erwähne ich gern das zuerst 1855 erschienene Lehrbuch von Lübsen: „Einleitung in die Infinitesimalrechnung“[2], das lange Zeit hindurch und vielleicht noch heute einen außerordentlichen Einfluß auf breite Schichten des Publikums besaß; zu meiner Zeit hat gewiß jeder einmal als Schüler oder später das Lübsensche Buch zur Hand genommen, und mancher hat daraus die erste Anregung zu weiteren mathematischen Studien geschöpft. Lübsen definiert zunächst den Differentialquotienten durch den Grenzbegriff, daneben aber stellt er seit der 2. Auf-

---

1) T. I. (2. Aufl. Paris 1833) pag. 14.
2) 8. Aufl. Leipzig 1899.

Ideeen sich überraschend schnell von Leibniz angeeignet hatte. Hier wird die approximationsmathematische Anschauung vertreten, insbesondere z. B. pg. 11 eine Kurve als Polygon von sehr kleinen Seiten, die Tangente als Verlängerung einer solchen Seite aufgefaßt. – In Deutschland wurde Leibnizsche Differentialrechnung besonders verbreitet durch Christian Wolff in Halle, der den Inhalt seiner Vorlesungen in den Elementa matheseos universae[1] niedergelegt hat. Er führt die Leibnizschen Differentiale bald am Anfang der Differentialrechnung ein, betont jedoch ausdrücklich, daß sie keinerlei reales Aequivalent haben. Vielmehr entwickelt er über das für unsere Wahrnehmung unendlich Kleine wiederum durchaus approximationsmathematische Ansichten; so führt er als Beispiel an, daß die Höhe eines Berges für die praktische Messung nicht merklich geändert wird, wenn man ein Stäubchen wegnimmt oder hinzusetzt.

4) Vielfach findet sich auch die metaphysische Ansicht vertreten, die den Differentialen eine reale Existenz zuschreibt; sie hat besonders

1) Zuerst erschienen 1710. – Ed. nov. Hallae, Magdeburgicae 1742. pag. 545.

in denen vorzugsweise der formale Standpunkt zum Ausdrucke kommt. Besonders charakteristisch ist da die kurze Arbeit aus dem Jahre 1712, [1] also aus seinen letzten Lebensjahren; da spricht er geradezu von Sätzen und Definitionen, die nur „tolerabiliter vera" oder französisch „passables" sind: „Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universalesque conceptus valent." Das bezieht er sowohl auf die komplexen Zahlen, als auf das Unendliche; sprechen wir etwa vom Unendlichkleinen, so „commoditati expressionis seu breviloquii mentalis inservimus, sed non nisi tolerabiliter vera loquimur, quae explicatione rigidantur".

3.) Von Leibniz aus verbreitet sich der neue Kalkül rasch auf dem Continent, und wir finden da jede seiner drei Auffassungen vertreten. Ich muß hier zunächst das erste Lehrbuch der Differentialrechnung nennen, das überhaupt erschien, die „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes" [2] vom Marquis de l'Hospital, einem Schüler Johann Bernoullis, der seinerseits die neuen

1) Observatio ..., et de vero sensu Methodi infinitesimalis: pag. 167–169.

2) Paris 1696 2. ed. 1715.

haben und ob sie überhaupt eine haben, wenn man nur in geeigneter Weise Rechenregeln für sie definiert, und diese richtig handhabt, so muss jedenfalls etwas Vernünftiges, Richtiges herauskommen; Leibniz verweist da immer auf die Analogie mit den Komplexen Zahlen, über die er ja ganz entsprechende Vorstellungen hat. Bei diesen *Rechenregeln für Differentiale* handelt es sich nun hauptsächlich um die Formel

$$f(x+dx)-f(x)=f'(x)\cdot dx;$$

der Mittelwertsatz zeigt, dass sie nur richtig ist, wenn man $f'(x+\vartheta\cdot dx)$ statt $f'(x)$ schreibt, aber der Fehler, den man hier macht, ist *unendlich klein von höherer (zweiter) Ordnung*, und solche *Grössen soll man* – das ist die hauptsächliche formale Regel – *beim Rechnen mit Differentialen vernachlässigen*.

Die wichtigsten *Publikationen von Leibniz* sind in den *Acta eruditorum*, jener berühmten wissenschaftlichen Zeitschrift, aus den Jahren *1684*, *1695* und *1712* enthalten.[1] Im ersteren Bande finden Sie unter dem Titel „Nova methodus pro maximis et minimis" (pag. 467 f.f.) überhaupt die erste Veröffentlichung über Differentialrechnung, und zwar entwickelt Leibniz dort lediglich die Regeln des Differenzierens. Die späteren Arbeiten geben auch *prinzipielle Erörterungen*,

[1] Zum Teil übers. in Ostwalds Klass. Nr. 162 (Hrsg. v. G. Kowalewski, Leipzig 1908)

standteil der Abscissenachse, als eine Größe, die kleiner als jede endliche Größe ist und doch nicht Null (*unendlich kleine Größe*). Ähnlich werden weiterhin die *Differentiale höherer Ordnung* d^2x, d^3x, ... definiert als unendlich kleine Größen 2^ter^, 3^ter^ ... Ordnung, deren jede gegen die vorangehenden unendlich klein ist; man hat so eine Reihe qualitativ verschiedener Größensysteme.

Diese Auffassung ist jedoch keineswegs die bei Leibniz allein herrschende, vielmehr kommen gelegentlich auch *approximationsmathematische* Anschauungen hervor; danach wäre das *Differential dx eine endliche, aber so kleine Strecke, daß längs ihr die Kurve nicht wahrnehmbar von der Tangente abweicht*. Jene metaphysischen Spekulationen sind ja gewiß nur Idealisierungen der einfachen hierin enthaltenen psychologischen Tatsachen.

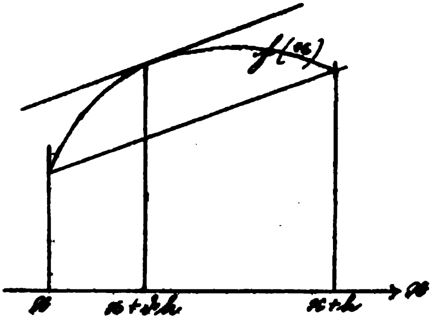
Ganz besonders findet sich bei Leibniz aber noch eine dritte Auffassung vertreten, die wohl vorzugsweise für ihn charakteristisch ist, *die formale Auffassung*; ich hatte ja schon öfters Gelegenheit, zu betonen, daß wir in *Leibniz* den *Begründer der formalen Mathematik* zu sehen haben. Da ist die Idee die: Ganz gleichgültig, was für eine reale Bedeutung die Differentiale

1.) auf *alte metaphysische Spekulationen über den Aufbau des Kontinuums* aus nicht mehr weiter zerlegbaren, letzten „unendlich kleinen" Bestandteilen. Schon im *Altertum* finden sich Anklänge an solche Vorstellungen, und von den *Scholastikern* und weiterhin den *jesuitischen Philosophen* wurden sie sehr gepflegt. Als charakteristischen Beleg nenne ich den Titel des schon erwähnten Buches Cavalieris „Geometria indivisibilibus continuorum", der seine wahre Grundauffassung andeutet; in der Tat kommt die approximationsmathematische Auffassung nur nebenbei bei ihm vor, und tatsächlich betrachtet er den Raum als aus unteilbaren letzten Bestandteilen, den „*Indivisibilia*" zusammengesetzt. Überhaupt wäre es für diesen Zusammenhang wichtig und interessant, die verschiedenen Zergliederungen zu kennen, die der Begriff des Kontinuums im Laufe der Jahrhunderte (und Jahrtausende) erlitten hat.

2.) An solche Ideenbildungen schließt *Leibniz* an, der sich ja mit Newton in den Ruhm der Erfindung der Infinitesimalrechnung teilt. Für ihn ist dann also *nicht der Differentialquotient als Grenzwert* das Primäre, sondern das *Differential dx der Variabelen x hat bereits reale Existenz als letzter, indivisibler Be-*

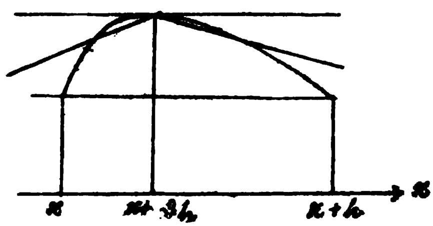
zu zeigen. Dann wird nun der berühmte *Weierstraßsche Satz* angewandt, *daß jede in einem Intervalle stetige Funktion daselbst zu mindesten je einer Stelle das Maximum und Minimum ihrer Werte wirklich annimmt.* Einer dieser Extremwerte unserer Funktion muß nun im *Innern* des Intervalles $(x, x+h)$ liegen, falls nicht der triviale Fall einer Konstanten vorliegt; es sei dies etwa ein Maximum und liege an der Stelle $x + \vartheta h$; dann hat $f(x)$ nach rechts und links kleinere Werte, d. h. der Differenzenquotient ist nach rechts hin negativ, nach links hin positiv. Der Differentialquotient, der ja nach Voraussetzung an jeder Stelle existieren soll, kann also an der Stelle $x + \vartheta h$ sowohl als Grenze lauter positiver Werte, als auch lauter negativer Werte dargestellt werden, je nachdem man ihn als Grenze eines nach links oder rechts hin genommenen Differenzenquotienten auffaßt. Er kann daher *nur Null* sein, womit die behauptete Existenz der horizontalen Tangente und damit der Mittelwertsatz bewiesen ist.

Parallel mit dieser Entwicklungsreihe, die wir so kennen gelernt haben, und auf der also die heutige wissenschaftliche Mathematik aufbaut, hat sich eine *wesentlich verschiedene Auffassung der Infinitesimalrechnung* durch die Jahrhunderte fortgepflanzt. Sie geht zurück anschaulich; er besagt nur, <u>daß zwischen den Punkten x und $x+h$ der Kurve es einen Punkt $x+\vartheta h$ gibt, wo die Kurventangente parallel der die Punkte x und $x+h$ verbindenden Sekante ist.</u>



5.) Wie beweist man nun <u>den Mittelwertsatz exakt arithmetisch</u>, ohne an die geometrische Anschauung zu appellieren? Ein solcher Beweis hat natürlich nur den Sinn, den Satz auf die vorher abstrakt in praezisester Form aufzustellenden arithmetischen Definitionen von Variabeln, Funktion, Stetigkeit etc. zurückzuführen. Daher ist ein vollständig strenger Beweis erst durch <u>Weierstraß und seine Nachfolger</u> erreicht, denen wir überhaupt die moderne arithmetische Auffassung des Zahlenkontinuums verdanken. Ich will hier nur die charakteristischen Momente der Betrachtung hervorheben.

Zunächst kann man den Satz leicht auf den Fall zurückführen, daß die unseren Bogen begrenzende Sekante <u>horizontal</u> ist, d. h. $f(x) = f(x+h)$; es ist dann die <u>Existenz einer Stelle mit horizontaler Tangente</u>



Definition des Differentialquotienten als Grenzwert, aber es fehlte ein Mittel, mit dem man umgekehrt aus seinem Werte den Zuwachs der Funktion in einem endlichen Intervalle abschätzen konnte. Dies gestattet nun der Mittelwertsatz, und es ist das große Verdienst Cauchys, diese zentrale Stellung voll erkannt und demgemäß den Mittelwertsatz an die Spitze der Differentialrechnung gestellt zu haben; es ist nicht zuviel gesagt, wenn man ihn deshalb als Begründer der exakten Infinitesimalrechnung im modernen Sinne feiert. Als grundlegende Werke kommen hier, auf seinen Pariser Vorlesungen fußend, in Betracht: „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal"[1.)] sowie die zweite Auflage, von der nur der erste Teil „Leçons sur le calcul différentiel"[2.)] erschienen ist.

Der Mittelwertsatz lautet nun: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion mit stetigem Differentialquotienten $f'(x)$, so gibt es zwischen x und $x+h$ stets eine Stelle $x+\vartheta h$, so daß

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\vartheta h), \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Hier tritt dieses den Mittelwertsätzen eigentümliche ϑ auf, das dem Anfänger zuerst häufig so wunderbar erscheint. Geometrisch ist dieser Satz durchaus

1.) Paris 1823 = Oeuvres complètes, Sér. II, T. IV (Paris 1899)
2.) Paris 1829 = Oeuvres complètes, Sér. II, T. IV (Paris 1899)

Diese Geschwindigkeit, mit der sich die Variable x in der Zeit ändert, macht Newton als ihre „Fluxion" $\dot{x}$ zur Grundlage seiner Betrachtungen. Er denkt sich alle Variablen x, y von dieser einen Urvariablen t, der Zeit, abhängig; der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint demgemäß als Quotient zweier Fluxionen $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, was wir heute ausführlicher $\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right)$ schreiben würden.

3) An diese Newtonsche Ideenbildung schließt eine große Reihe von Mathematikern des 18. Jahrhunderts an, die die Infinitesimalrechnung mit mehr oder weniger Praezision auf dem Grenzbegriff aufbauen. Lassen Sie mich da nur einige Namen herausgreifen: C. Maclaurin in seinem Treatise of fluxions *), das als Lehrbuch jedenfalls einen breiten Wirkungskreis hatte, ferner d'Alembert in der großen französischen Encyclopédie méthodique, endlich Kästner hier in Göttingen in seinen Vorlesungen und Büchern. Schließlich gehört wohl auch Euler vorwiegend in diese Entwicklungsreihe, wiewohl bei ihm vielleicht auch andere Tendenzen zum Vorschein kommen.

4) Eine ganz wesentliche Lücke blieb bei allen diesen Darstellungen noch auszufüllen, ehe von einem konsequenten System der Infinitesimalrechnung die Rede sein konnte: Wohl hatte man die

*) Edinburgh 1742.

mae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia; nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum." Übrigens vermeidet Newton in diesem Werke den Infinitesimalkalkül in der Darstellung durchaus, obgleich er ihn gewiß zur Ableitung seiner Resultate benutzt hat. Denn die grundlegende Schrift, in der er seine Methode der Infinitesimalrechnung entwickelt, hatte er bereits 1671 verfaßt, obwohl sie erst 1736 erschien; sie trägt den Titel „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" [1].

Dort entwickelt Newton, ohne weiter auf prinzipielle Erörterungen einzugehen, den neuen Kalkül an zahlreichen Beispielen. Er knüpft dabei an eine Vorstellung des täglichen Lebens an, die den Grenzübergang sehr nahe legt; hat man nämlich eine Bewegung $x = f(t)$ auf der x-Achse in der Zeit t, so hat jedermann einen bestimmten Begriff davon, was die Geschwindigkeit einer solchen Bewegung ist, und wenn man dem nachgeht, so sieht man, daß im Grunde der Grenzwert der Differenzenquotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ damit gemeint ist.

1) J. Newtoni Opuscula: T. I. (Lausannae 1744) pag. 29.

Hochschule allgemein gelehrt wird, und wie ich Ihnen also wohl nur kurz in Erinnerung zu rufen brauche, daß die Infinitesimalrechnung lediglich eine Anwendung des allgemeinen Grenzbegriffes ist: Der Differentialquotient ist definiert als Grenzwert der Quotienten entsprechender endlicher Zuwüchse von Variabler und Funktion:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

– vorausgesetzt, daß dieser Limes existiert –, und keineswegs ist er ein Quotient, in dem dy und dx selbständige Bedeutung haben. Ebenso ist das Integral definiert als Grenzwert einer Summe:

$$\int_a^b y\,dx = \lim_{\Delta x_i = 0} \sum_{(i)} y_i \cdot \Delta x_i,$$

wo die Δx_i endliche Teile des Intervalles $a \leq x \leq b$, die y_i beliebige Funktionswerte darin bedeuten, und alle Δx_i gleichzeitig gegen Null zu konvergieren haben; keineswegs aber hat $y \cdot dx$ etwa als Summand einer Summe reale Bedeutung. Diese Bezeichnungen werden nur aus den soeben erörterten Zweckmäßigkeitsgründen beibehalten.

2.) Diese Auffassung findet sich bereits in recht präziser Form bei Newton selbst ausgesprochen. Ich verweise da auf eine Stelle in seinem Hauptwerk, den „Principia philosophiae naturalis“[1] von 1687: „Ulti-

[1] reprinted for W. Thomson and H. Blackburn. Glasgow 1871. pag. 38.

er wie mit seinen Apparaten umgehe.

Im diesem Zusammenhange möchte ich gleich die *Leibnizsche Schreibweise* rühmen, die ja heute die herrschende ist; denn sie vereinigt mit einem *zweckmäßigen Anklang an die naive Anschauung* doch auch einen gewissen Hinweis auf den in Wahrheit in den Begriffen enthaltenen abstrakten *Grenzprozeß*. So erinnert die Leibnizsche Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ des Differentialquotienten daran, daß er aus einem *Quotienten* entsteht, aber das d im Gegensatz zu dem für endliche Differenzen üblichen Δ zeigt an, daß auch etwas Neues, nämlich der *Grenzübergang* hinzugekommen ist. Und ebenso deutet das Integralsymbol $\int y\,dx$ auf die Entstehung des Integrales aus einer *Summe* kleiner Größen hin; dabei ist aber nicht das gewöhnliche Summenzeichen Σ sondern ein stilisiertes S (es ist merkwürdiger Weise nicht überall bekannt, daß das $\int$ diese Bedeutung hat) verwendet, das anzeigt, daß hier doch noch ein neuer Prozeß zur Summation hinzugetreten ist

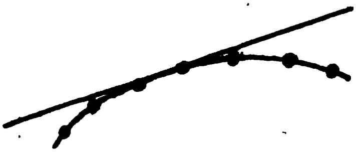
Wir müssen nun endlich auf die *logische Begründung der Differential- und Integralrechnung* näher eingehen, und wollen sie sogleich in ihrer historischen Entwicklung betrachten.

1.) Die *Hauptidee* ist da, wie es ja heute an der *des der beiden Punkte unbegrenzt nähert*. Analog wird man auf diesem naiven Standpunkte als *Krümmungskreis der* Kurve *den Kreis* auffassen, *der durch drei aufeinander folgende Polygonecken geht*, während exakt genommen, der Krümmungskreis die *Grenzlage dieses Kreises bei unbegrenzter Annäherung der drei Punkte ist*.

Die *überzeugende Kraft*, die solchen naiven hodegetischen Betrachtungen innewohnt, ist für verschiedene Personen natürlich sehr verschieden. Manche – und dazu rechne ich mich selbst – fühlen sich durch sie außerordentlich befriedigt, andere wieder, die einseitig nach der rein logischen Seite veranlagt sind, finden sie durchaus nichtssagend, und können sich nicht denken, wie man sie überhaupt als Grundlage mathematischer Betrachtungen auffassen kann.

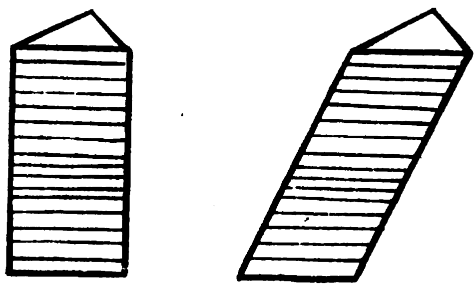
Übrigens kommen diese naiven Betrachtungsweisen auch heute noch überall da unwillkürlich zur Geltung, wo man in der *mathematischen Physik*, der *Mechanik*, der *Differentialgeometrie* irgend einen mathematischen Ansatz zu Stande bringen will, denn da sind sie, wie Sie alle wissen, sehr zweckmäßig. Freilich spottet der reine Mathematiker vielfach über eine solche naive Darstellung; als ich studierte, sagte man, daß für den Physiker das Differential ein Stück Messing sei, mit dem paarweise kongruent sind, d.h. der eine Körper entsteht aus dem andern durch Verschiebung der einzelnen Blätter des Haufens gegeneinander; dabei kann sich der Rauminhalt natürlich nicht ändern, da er sich nach wie vor aus den gleichen Lamellen aufbaut.

Ganz ähnlich führt die naive Anschauung auf den *Differentialquotienten einer Funktion*, d.h. die *Kurventangente*. Man ersetzt da – und so hat man es tatsächlich gemacht – die Kurve



durch einen geradlinigen Polygonzug, der hinreichend viele auf der Kurve ziemlich dicht gelegene Punkte zu Ecken hat; nach der Natur unserer sinnlichen Anschauung kann man da, aus der Ferne gesehen, die Kurve kaum mehr von dem von diesen Punkten gebildeten Haufen, und noch weniger von dem Polygonzug selbst unterscheiden. Die *Tangente* der Kurve wird dann kurzweg als *Verbindungslinie zweier aufeinander folgender solcher Punkte*, also als Verlängerung einer solchen Polygonseite definiert. Für den abstrakt logischen Standpunkt bleibt diese Gerade, wenn die Punkte auch noch so dicht gewählt sind, natürlich immer nur eine *Sekante* der Kurve, und die *Tangente ist erst die Grenzlage*, der sie sich bei Verkleinerung der Abstänniden, und indem er die von diesen gebildete Facettenfläche der Kugeloberfläche $4\pi r^2$ einfach gleich setzt, erhält er die richtige Volumenformel $\frac{4\pi r^3}{3}$. Übrigens verweist Kepler ausdrücklich auf den praktischen, heuristischen Wert solcher Betrachtungen, und verweist, was <u>strenge</u> mathematische Beweise angeht, auf die komplizierten Betrachtungen des <u>Archimedes (Exhaustionsmethode</u>).

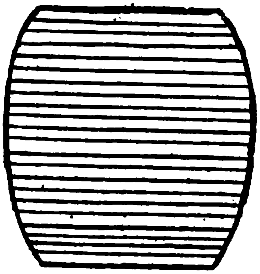
Ähnliche Überlegungen finden sich auch in dem Buche des Jesuiten <u>Bonaventura Cavalieri</u>, „<u>Geometria indivisibilibus continuorum</u>“[1.)], dort wo er das heute allgemein nach ihm genannte Prinzip aufstellt: <u>Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Flächen ergeben</u>. Von diesem <u>Cavalierischen Prinzip</u> ist bekanntlich auf unseren Schulen sehr viel die Rede; man glaubt dadurch die Integralrechnung vermeiden zu können, während es doch tatsächlich ganz ihr angehört. — Die Begründung bei Cavalieri kommt genau darauf hinaus, daß er sich beide Körper aus dünnen übereinandergeschichteten Blättern aufgebaut denkt, die dann nach der Annahme



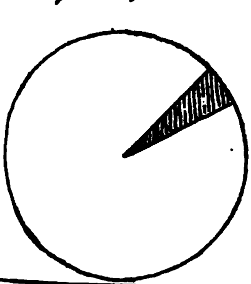
1.) Bononiae 1653; erste Aufl. 1635.

einer weiteren Verkleinerung der Rechtecke wird ja ohnehin durch die notwendige Ungenauigkeit der Zeichnung stets ein Ende gesetzt sein.

Diese naive Denkweise findet sich nun in der Tat bei den allerbedeutendsten Forschern in der Entstehungsperiode der Infinitesimalrechnung. Da nenne ich zuerst *Kepler*, der in seiner „*Nova stereometria doliorum vinariorum*“ [1] sich mit der Körpermessung beschäftigt. Sein Hauptinteresse richtet sich hierbei auf die Ausmessung von Fässern und ihre zweckmäßigste Gestaltung.



Dabei stellt er sich ganz auf den soeben angedeuteten naiven Standpunkt: Er denkt sich das Faß aus *zahlreichen dünnen Blättern*, aus Papier etwa, aufgeschichtet und setzt seinen Inhalt der Summe der Inhalte dieser Blätter, deren jedes einen Zylinder bildet, gleich. In ähnlicher Weise verfährt er bei der Berechnung der *einfachen geometrischen Körper*, so z. B. der *Kugel*. Die denkt er sich aus sehr

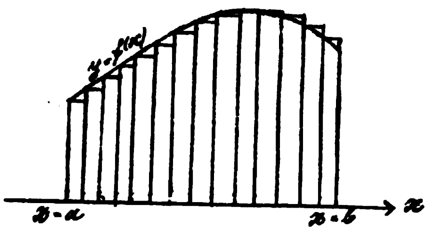


vielen *kleinen Pyramiden* mit der Spitze im Zentrum zusammengesetzt; dann ist der Rauminhalt nach der bekannten Pyramidenformel gleich $\frac{r}{3}$ mal der Summe aller Grundflächen der kleinen Pyra-

1) Linz 1615.

beispielsweise die Kurve ein hingezeichneter Strich bestimmter Dicke ist, *nicht* die *abstrakte* Anschauung, die den Grenzübergang zur exakten eindimensionalen Linie schon als vollzogen postuliert. Ich möchte diese Behauptung bestätigen, indem ich Ihnen kurz darlege, wie die Ideen der Infinitesimalrechnung sich historisch ausgebildet haben.

Betrachten wir zunächst den *Integralbegriff*, so ist zu bemerken, daß er historisch beim *Problem der Ausmessung von Flächen- und Körperinhalten* (*Quadratur und Kubatur*) beginnt. Die abstrakt logische Definition bestimmt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, d. i. den Flächeninhalt der von der Kurve $y=f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten $x=a$ und $x=b$ begrenzt wird, ja bekanntlich als *Limes der Summe lauter dieser Fläche eingezeichneter schmaler Rechtecke*, wenn man deren Zahl unter gleichzeitiger unbegrenzter Verkleinerung ihrer Breite unbegrenzt wachsen läßt.



Von der sinnlichen Anschauung aus aber liegt es nahe, den in Rede stehenden Flächeninhalt nicht so als scharfen Limes, sondern einfach als *Summe von sehr vielen ziemlich schmalen Rechtecken* zu definieren; denn wie in jeder Wissenschaft ganz anders, er *benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt, vor.* Man kann sehr zahlreiche Beispiele anführen, wo große Mathematiker die wichtigsten Sätze gefunden haben, ohne sie exakt beweisen zu können. Soll man die große Leistung, die hierin liegt, nicht in Anschlag bringen, soll man jener Definition zuliebe sagen, daß das keine Mathematik ist, und daß nur die Nachfolger, die schließlich geglättete Beweise der Sätze fanden, Mathematik trieben? Schließlich ist es ja willkürlich, wie man das Wort gebrauchen will, aber ein Werturteil kann nur dahin lauten, daß die *induktive Arbeit dessen, der den Satz zum ersten Male aufstellte, gewiß gerade so viel wiegt, wie die deduktive dessen, der ihn zuerst bewies*; denn beides ist gleich notwendig.

Gerade bei der Erfindung und Ausbildung der Infinitesimalrechnung hat nun dieses induktive, nicht auf bündige logische Schlüsse gestützte Vorgehen eine große Rolle gespielt, und *das wirksamste heuristische Hilfsmittel war hier sehr häufig die sinnliche Anschauung* – ich meine die *unmittelbare* sinnliche Anschauung mit allen ihren Ungenauigkeiten, für die wollen jetzt endlich in einem neuen Kapitel

III. Von der eigentlichen Infinitesimalrechnung

handeln. Natürlich setze ich voraus, daß Sie alle differenzieren und integrieren können, und es schon vielfach angewandt haben. Hier sollen uns lediglich allgemeinere Fragen, wie die der *logischen* und *psychologischen Begründung*, des *Unterrichts* u. dgl. beschäftigen.

1. Allgemeine Ausführungen zur Infinitesimalrechnung.

Eine *allgemeine Bemerkung über den Umfang der Mathematik* will ich voraus schicken. Sie können von Nichtmathematikern, besonders auch von Philosophen, oft hören, *die Mathematik habe lediglich logische Folgen aus klar gegebenen Praemissen zu ziehen*; dabei sei es sogar ganz gleich, was diese Praemissen bedeuten, ob sie richtig oder falsch sind — wenn sie sich nur nicht widersprechen. Demgegenüber wird jeder, der selbst produktiv mathematisch arbeitet, ganz anders reden. In der Tat urteilen jene Leute nur nach der auskrystallisierten Form, in der man fertige mathematische Theorien zur Darstellung bringt; *der Forscher* aber arbeitet in der Mathematik wenn man die *Periode der dargestellten Funktion unendlich groß* werden läßt, und das eine Funktion von unendlich großer Periode einfach eine nichtperiodische, längs der ganzen x-Achse willkürliche Funktion ist, so gibt das ein *Mittel, um auch nichtperiodische Funktionen darzustellen*. Dieser Uebergang vollzieht sich nun so, daß man zunächst durch eine lineare Transformation des Argumentes der Reihe auch Funktionen mit beliebiger Periode l statt der bestimmten 2π darstellt, und dann l unendlich werden läßt. Dabei geht dann die Reihe über in das sog. *Fouriersche Integral*

$$f(x) = \int_0^\infty (\varphi(\nu)\cos\nu x + \psi(\nu)\sin\nu x)\,d\nu,$$

wo $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ sich in bestimmter Weise als *Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$ über die Funktion $f(x)$* ausdrücken. Das Neue ist also, daß der Index ν kontinuierlich *alle* Werte von 0 bis ∞, statt nur die Werte $0, 1, 2 \ldots$ durchläuft, und daß entsprechend die Funktionen $\varphi(\nu)d\nu$ und $\psi(\nu)d\nu$ an Stelle der Koeffizienten a_ν, b_ν treten.

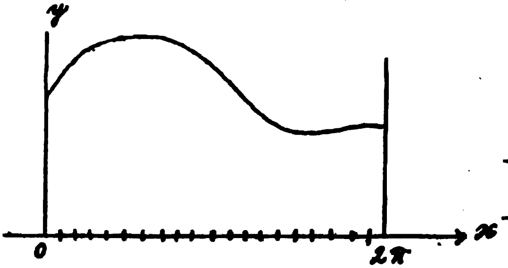
Wir können nunmehr die elementaren transzendenten Funktionen verlassen, die uns bisher in unseren Betrachtungen über die Analysis beschäftigt hatten, und klärung gegeben, aber er hatte als erster den Mut, an die allgemeine darstellende Kraft der Reihen zu *glauben*, und, auf diesen Glauben gestützt, hat er seine Richtigkeit durch wirkliche Ausrechnung einiger charakteristischer Beispiele unstetiger Funktionen, so wie wir sie neulich etwa betrachteten, unzweifelhaft dargetan. Die eigentlichen allgemeinen Konvergenzbeweise gab erst, wie schon erwähnt, später *Dirichlet*, der übrigens ein Schüler Fouriers war. Das Auftreten Fouriers aber hat wie eine Revolution gewirkt: Daß man durch Reihen analytischer Funktionen solche willkürliche, verschiedenen analytischen Gesetzen in verschiedenen Teilintervallen gehorchende Funktionen darstellen könne, das war den Mathematikern damals etwas ganz Neues und Unerwartetes. Zum Dank für die Eröffnung dieser Erkenntnis hat man dann den trigonometrischen Reihen geradezu Fouriers Namen gegeben, der ja auch sehr allgemein Anwendung findet. Freilich enthält jede solche Personalbenennung eine sehr starke Einseitigkeit, wenn nicht gar Ungerechtigkeit.

Eine *zweite Leistung Fouriers* muß ich hier am Schluß noch kurz erwähnen. Er betrachtete nämlich auch den *Grenzfall der trigonometrischen Reihen*, der eintritt, da diese das Intervall überall dicht erfüllen, können wir jede irrationale Stelle so durch rationale Stellen beliebig approximieren, und wegen der Stetigkeit der Funktion muß sich dabei der Wert $f(x)$ als Limes der Funktionswerte an den approximierenden Stellen ergeben. Dazu kommt aber weiterhin, *daß die Menge aller rationalen Zahlen „abzählbar" ist*, d. h. daß man sie sämtlich in eine Reihe bringen kann, wo auf ein bestimmtes erstes ein bestimmtes zweites, drittes, u. s. f. Element folgt. Daraus ergibt sich aber, daß eine willkürliche stetige Funktion geben nichts heißt, als eine abzählbare Reihe von Konstanten – die Funktionswerte an den so geordneten rationalen Stellen – geben; genau in der gleichen Weise, durch die abzählbare Reihe der Konstanten $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$ wird aber eine bestimmte trigonometrische Reihe gegeben, *so daß jenes Bedenken, die Menge der stetigen Funktionen sei von Natur wesentlich größer als die der Reihen gegenstandslos geworden ist*. Wir werden später noch in vollständigerer Weise diese Erörterungen wieder aufnehmen.

Der Mann, der alle solche Bedenken zuerst überwunden hat, war *Fourier*, und darin liegt seine *große Bedeutung in der Geschichte der trigonometrischen Reihen*. Er hat zwar nicht diese mengentheoretische Auf-

Obwohl man in der Kenntnis dieser Reihen bald Fortschritte machte, wollte doch niemand so recht glauben, daß man durch solche Reihen willkürliche, graphisch gegebene Funktionen darstellen könne. Dem lag wohl eine unbestimmte Vorstellung von Ueberlegungen zu Grunde, wie sie uns heute in der *Mengenlehre* durchaus geläufig sind; man mag von vornherein angenommen haben – ohne es natürlich präzis aussprechen zu können – daß die „Menge" aller willkürlichen nur stetigen Funktionen größer sei als die „Menge" aller möglichen Systeme von Zahlwerten $a_0, a_1, a_2 \dots b_1, b_2 \dots$, die die Gesamtheit aller trigonometrischen Reihen repräsentiert.

Allein die präzisen Begriffsbildungen der modernen Mengenlehre haben hier Klarheit geschaffen, und gezeigt, daß jenes Vorurteil falsch war. Lassen Sie mich diesen wichtigen Punkt bald hier etwas näher ausführen. Man kann leicht erkennen, *daß man den gesamten Verlauf einer etwa in dem Intervalle $(0, 2\pi)$ ganz willkürlich definierten stetigen Funktion bereits kennt, wenn man nur ihre Werte an allen rationalen Stellen dieses Intervalles kennt*; denn



auch mit diesen Dingen beschäftigen!

Diesen letzten Erörterungen möchte ich nun noch einige Worte anfügen über die wichtige Rolle, die die Lehre von den trigonometrischen Reihen in dieser ganzen Entwicklung gespielt hat. Ausführliche literarische Angaben hierüber finden Sie in Burkhardts „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen" (besonders in der 2. und 3. Lieferung), ferner „Riesenbericht", wie wir ihn im engeren Kreise wohl nennen, der schon seit 7 Jahren in einzelnen Lieferungen in Bd. X des Jahresberichtes der deutschen Mathematikervereinigung erscheint; er vereinigt in über 9000 Zitaten eine solche Menge Literatur, wie sie wohl nirgends anders zu finden ist.

Der erste, der auf die Darstellung allgemeiner Funktionen durch trigonometrische Reihen kam, war Daniel Bernoulli, der Sohn des Johann Bernoulli. Er bemerkte um 1750 beim akustischen Problem der schwingenden Saite, daß sich die allgemeine Saitenschwingung durch Ueberlagerung der dem Grundton und den reinen Obertönen entsprechenden Sinusschwingungen darstellen läßt; das involviert gerade die Entwicklung der die Saitenform darstellenden Funktion in eine trigonometrische Reihe.

3 Dezennien, zurückbleibt, wenn da also, wie man vielleicht sagen kann, eine gewisse Hysteresis stattfindet. Die bestehende Hysteresis ist aber leider viel bedeutender, sie umfaßt mehr als ein Jahrhundert, indem die Schule meist die ganze Entwicklung von Euler an ignoriert; so bleibt für die Reformarbeit also noch ein genügend großes Feld. Und was wir an Reformen verlangen, das ist wirklich recht bescheiden, wenn Sie es mit dem heutigen Stande der Wissenschaft vergleichen: *Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder andern Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll aber nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler massenhaft findet, dem Schüler als lebendiger Besitz überliefert werden.* Für den *Lehrer* der Mathematik speziell scheint darüber hinaus noch zum mindesten die *Kenntnis der Elemente der komplexen Funktionentheorie* wünschenswert, und wenn ich das gleiche Verlangen auch hinsichtlich der neuesten mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht stellen möchte, so möge es doch unter den vielen Lehrern immer wenigstens eine kleine Zahl geben, die selbständig arbeitend sich

y zugeordnet ist.

Einen Unterschied dieser neuesten Entwicklung der älteren gegenüber will ich hier sogleich hervorheben: Die unter 1.) bis 5.) aufgezählten Begriffsbildungen sind überwiegend im Hinblick auf Anwendungen in der Natur entstanden und ausgebaut worden; man denke nur an den Titel des Fourierschen Werkes! Die neueren unter 6.) und 7.) erwähnten Untersuchungen sind aber Produkte rein mathematischen Forschungstriebes, der nicht auf die Bedürfnisse der Naturerklärung bedacht ist, und sie haben bisher auch wohl noch keine direkte Anwendung gefunden. Ein Optimist wird natürlich meinen, daß zweifellos noch einmal die Zeit für solche Anwendung kommen wird.

Stellen wir endlich wieder unsere gewöhnliche Frage, was die Schule von allen diesen Dingen aufnehmen soll, was der Lehrer und was der Schüler wissen sollte.

Ich möchte da zuerst aussprechen, daß es nicht nur zu entschuldigen, sondern ganz in Ordnung ist, wenn die Schule gegenüber den neuesten Fortschritten unserer Wissenschaft immer eine gewisse Spanne Zeit, sagen wir vielleicht nien gerade auf möglichst unstetige Funktionen geworfen, die über die Dirichletschen Bedingungen wesentlich hinausgehen; da hat man denn die merkwürdigsten Funktionstypen gefunden, die die ungeahntesten Singularitäten „zu scheußlichen Klumpen geballt" enthalten. Es handelt sich hier vor allem darum, zu untersuchen, wie weit die für vernünftige Funktionen geltenden Sätze bei solchen Abnormitäten noch erhalten bleiben.

7.) Endlich schließt hier eine noch weitergehende ganz moderne Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes an. Bisher war eine Funktion stets definiert an jeder Stelle des Kontinuums aller reellen oder komplexen Werte x, oder doch wenigstens an jeder Stelle eines ganzen Intervalles, bezw. Bereiches. Seitdem aber der von G. Cantor geschaffene Mengenbegriff mehr und mehr in den Vordergrund tritt, der das Kontinuum aller x nur als ein Beispiel einer „Menge" von Dingen betrachtet, zieht man nun auch Funktionen heran, die nur mehr für die Stellen x irgend einer beliebigen Menge definiert zu sein brauchen, und nennt überhaupt allgemein y eine Funktion von x, wenn jedem Elemente einer Menge von Dingen (Zahlen oder Punkten) x ein Element einer Menge

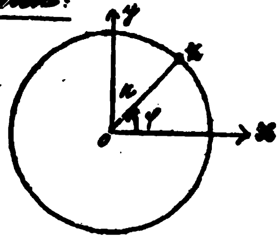
Rückwärts aber ist durch diese trigonometrische Reihe jede der Größen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_1, \beta_2 \dots$ und damit die Potenzreihe bis auf die additive Konstante $-\frac{i\beta_0}{2}$ völlig bestimmt. Gibt man also auf dem Kreise irgend eine Werteverteilung $u(\varphi)$, die sich nur in eine trigonometrische Reihe entwickeln läßt, d. h. eine Funktion im Dirichletschen Sinne, die nur den Dirichletschen Bedingungen genügt, so wird ihr auf die angegebene Weise eine bestimmte innerhalb des Kreises (r) konvergierende Potenzreihe (analytische Funktion) zugeordnet, deren Realteil auf diesem Kreise die Werte $u(\varphi)$ annimmt. Auf diesem Wege kommen also der Fourier-Dirichletsche und der Lagrangesche Funktionsbegriff gewissermaßen vollkommen zur Deckung, indem die Willkür, die für den Verlauf der trigonometrischen Reihe $u(\varphi)$ längs des ganzen Kreises besteht, durch die Potenzreihe in die nächste Umgebung des Nullpunktes konzentriert wird.

c.) Nun ist aber die moderne Wissenschaft bei diesen Begriffsbildungen natürlich nicht stehen geblieben, denn die Wissenschaft als solche ruht nie, wenn auch der einzelne Forscher ermüden mag. Man hat sich da im Gegensatz zu dem, was ich oben als Dirichlets Standpunkt charakterisiert habe, beim Studium der reellen Funktionen in den letzten 3 Dezen-

$$f(z) = u + iv = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

die bei kleinem z konvergieren möge und dann in Weierstraßscher Terminologie ein Element einer analytischen Funktion definiert. Wir betrachten ihre Werte auf einem kleinen Kreise mit dem Radius r

z-Ebene:



um $z = 0$, der ganz im Konvergenzbereiche gelegen sei, d. h. wir setzen $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in die Potenzreihe ein:

$$f(z) = c_0 + c_1 r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + c_2 r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \dots;$$

spalten wir die Koeffizienten in reellen und imaginären Teil:

$$c_0 = \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{2}, \quad c_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad c_2 = \alpha_2 - i\beta_2 \dots,$$

so ergibt sich für den reellen Teil von f:

$$u(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 r\cos\varphi + \alpha_2 r^2\cos 2\varphi + \dots$$
$$+ \beta_1 r\sin\varphi + \beta_2 r^2\sin 2\varphi + \dots;$$

das negative Vorzeichen der imaginären Teile in den c war gewählt, damit wir hier durchweg positive Zeichen erhalten. Die Potenzreihe für $f(z)$ liefert also unmittelbar für die Werte des reellen Teiles u auf unserm Kreise, aufgefaßt als Funktion des Winkels φ, eine trigonometrische Reihendarstellung genau der früheren Art, deren Koeffizienten α_0, $r^\nu\alpha_\nu$, $r^\nu\beta_\nu$ sind.

denen diese Funktionen genügen müssen, sehr präzis formulierte.

5.) Wir müssen nun berücksichtigen, daß in dieser Zeit, etwa um 1830, die allgemeinere Entwicklung der Theorie von Funktionen einer komplexen Argumentes einsetzt, und in den nächsten ungefähr 3 Dezennien allmählich Gemeingut der Mathematiker wird. Diese Entwicklung knüpft sich vor allem an die Namen Cauchy, Riemann und Weierstraß; die ersten beiden gehen bekanntlich von den nach ihnen benannten partiellen Differentialgleichungen aus, denen reeller und imaginärer Teil u, v der komplexen Funktion

$$f(x+iy) = u+iv$$

genügen, während Weierstraß die Funktion durch eine Potenzreihe und den Inbegriff ihrer analytischen Fortsetzungen definiert, und damit gewissermaßen wieder an Lagrange anknüpft.

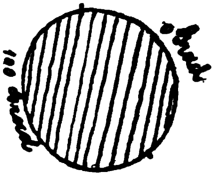
Nun ist aber das Merkwürdige, daß dieser Uebergang ins Komplexe einen Ausgleich und Zusammenhang zwischen den beiden oben betrachteten Arten des Funktionsbegriffes schafft; ich will das hier noch skizzieren.

Wir setzen $z = x+iy$ und betrachten die Potenzreihe

4.) Diese Definition bleibt auch bei Dirichlet in den zuletzt erwähnten Arbeiten im Grunde bestehen, nur wird sie in die Sprache der Analysis übersetzt, oder – um ein modernes Wort zu gebrauchen – arithmetisiert. Und das ist in der Tat nötig, denn natürlich kann eine Kurve, wie fein man sie auch zeichnet, nie exakt eine Zuordnung der Werte y und x definieren, da die Dicke des Striches eine arithmetisch genaue Abmessung der Werte nicht gestattet.

Dirichlet formuliert nun den arithmetischen Inhalt der Eulerschen Definition folgendermaßen: „Ist in einem Intervalle jedem einzelnen Werte x ein bestimmter Wert y zugeordnet, dann soll y eine Funktion von x heißen." Hat er so auch schon diesen ganz allgemeinen Funktionsbegriff, so denkt er doch immer in allererster Linie an stetige oder nicht allzu unstetige Funktionen, wie man dies damals allgemein tat. Man hielt kompliziert gehäufte Unstetigkeiten wohl für denkbar, glaubte aber kaum, daß sie irgend Interesse verdienen könnten. Dieser Standpunkt kommt schon darin zum Ausdruck, daß Dirichlet immer von der Reihenentwicklung „ganz willkürlicher Funktionen" spricht (genau wie Fourier „fonctions entièrement arbitraires" gesagt hatte), wenn er auch seine „Dirichletschen Bedingungen"

Sein Hauptwerk ist die „Théorie analytique de la chaleur" [1], die 1822 erschien; die erste Mitteilung über die hier dargelegten Theorieen hat er bereits 1807 der Pariser Akademie vorgelegt. Dieses Werk ist die Quelle aller der Methoden der heutigen mathematischen Physik, die man als die Zurückführung aller Probleme auf die Integration partieller Differentialgleichungen bei vorgegebenen Randwerten, die sog. „Randwertaufgaben", charakterisieren kann. Fourier behandelt so speziell das Problem der Wärmeleitung, das an einem einfachen Beispiele etwa so lautet: Der Rand einer ebenen kreisförmigen Platte wird dauernd in einem gegebenen Temperaturzustande erhalten, der eine Teil beispielsweise auf dem Gefrierpunkt, der andere auf dem Siedepunkt; welcher stationäre Temperaturzustand bildet sich durch den eintretenden Wärmeleitungsprozeß schließlich aus?



Hier treten also Randwerte auf, die in den einzelnen Teilen des Randes unabhängig von einander willkürlich gegeben werden können, und daher tritt naturgemäß gegenüber Lagrange wieder die zweite Eulersche Definition des Funktionsbegriffes in den Vordergrund.

1) Abgedruckt in Fourier, Oeuvres T. I (Paris 1888).

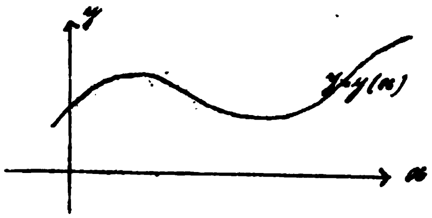
und so y in einem ausgedehnteren Gebiete definieren, das man durch Wiederholung dieses Verfahrens event. noch weiter ausdehnen kann. Dieser Prozeß der „*analytischen Fortsetzung*" ist jedem, der sich etwas mit komplexer Funktionentheorie beschäftigt hat, wohl bekannt.

Bemerken Sie übrigens besonders, daß die Koeffizienten der Potenzreihen $\mathfrak{P}(x)$ und damit *die ganze Funktion y bestimmt sind, wenn man den Verlauf der Funktion y längs einer beliebig kleinen Strecke der x-Achse, etwa in der Umgebung von $x = 0$, kennt*; denn damit kennt man die Werte aller Ableitungen von y für $x = 0$ und hat dann bekanntlich

$$y(0) = a_0 \qquad y'(0) = a_1 \qquad y''(0) = 2a_2 \;\ldots$$

Eine analytische Funktion im Sinne von Lagrange ist also durch ihr kleinstes Stück in ihrem Gesamtverlauf völlig bestimmt. Diese Eigenschaft steht durchaus im Gegensatz zum Verhalten einer Funktion im Sinne der zweiten Eulerschen Definition: da läßt jedes Stück einer Funktion sich noch nach freier Willkür fortsetzen.

3.) Für die Weiterentwicklung des Funktionsbegriffes haben wir nunmehr *Fourier* zu nennen, einen der zahlreichen bedeutenden Mathematiker, die am Anfange des 19. Jahrhunderts in Paris wirkten.



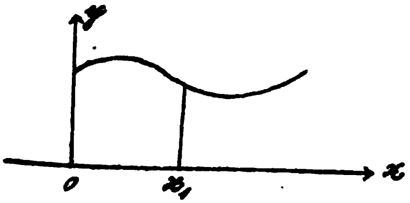
ordinatensystem eine Kurve beliebig, „libero manus ductu" gezeichnet ist. Einen Zusammenhang beider Definitionen stellt Euler nicht her.

2) Lagrange schränkt um 1800 in seiner „Théorie des fonctions analytiques" den Funktionsbegriff stark ein, auf sog. „analytische Funktionen", die durch eine Potenzreihe in x definiert sind. Wir haben dafür dieses Wort „analytische Funktionen" beibehalten, wobei wir uns freilich bewußt sind, daß es sich nur um eine spezielle Klasse der in der Analysis wirklich vorkommenden Funktionen handelt. Nun ist durch eine Potenzreihe

$$y = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine Funktion zunächst nur innerhalb des Konvergenzbereiches, also in einer gewissen Umgebung von $x = 0$, definiert. Man hat aber bald eine Methode gefunden, den Definitionsbereich der Funktion darüber hinaus auszudehnen: liegt etwa x_1 noch im Konvergenzgebiete von $\mathfrak{P}$, und setzt man $\mathfrak{P}(x)$ in eine nach Potenzen von $(x - x_1)$ fortschreitende Potenzreihe um:

$$y = \mathfrak{P}_1(x - x_1),$$



so kann diese möglicher Weise über jenen Bereich hinaus konvergieren, Wir müssen uns in dieser Vorlesung um so eher damit beschäftigen, als unsere Schulreform ja ganz wesentlich unter dem Zeichen der Hervorhebung dieses so wichtigen Begriffes im Schulunterricht steht.

Wir wollen zunächst wieder der historischen Entwicklung folgen. Bemerken wir zunächst, daß sich bei den älteren Autoren, wie Leibniz und den Bernoullis, der Funktionsbegriff immer nur an einzelnen Beispielen, den Potenzen, trigonometrischen Funktionen u. dgl. findet. Allgemeinen Formulierungen begegnen wir zuerst im 18. Jahrhundert:

1.) Bei Euler, ums Jahr 1750 — um nur runde Zahlen zu nennen — finden sich 2 verschiedene Erklärungen des Wortes Funktion:

a.) In seiner Introductio definiert er als Funktion y von x jeden „analytischen Ausdruck" in x, d. h. jeden Ausdruck, der aus Potenzen, Logarithmen, trigonometrischen Funktionen u. dgl. zusammengesetzt ist; genau umschreibt Euler die hier zugelassenen Ausdrücke nicht. Im Uebrigen hat er bereits die geläufige Einteilung in algebraische und transzendente Funktionen.

b.) Daneben findet sich bei ihm eine Funktion $y(x)$ auch dadurch definiert, daß in einem x-y-Koalso geradezu experimentell beobachtet; man hat sie anfänglich wohl auf Ungenauigkeiten der Apparates zurückgeführt, bis endlich Gibbs sie als notwendig erkannte. Ist allgemein D die Größe des Sprunges $(= |f(x+0) - f(x-0)|)$, so hat Gibbs gezeigt, daß die aufgesetzte Verlängerung gleich

$$-\frac{D}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\,0{,}28\,D = 0{,}09\,D$$

ist. Was die Begründung dieser Aussage anlangt, so genügt es, sie für eine einzige unstetige Funktion, etwa die des Beispiels, nachzuweisen, da alle anderen Funktionen mit gleichem Sprunge aus ihr durch Addition stetiger Funktionen hervorgehen müssen; hier ist der Beweis aber nicht eben sehr schwierig, sondern er ergibt sich aus der direkten Betrachtung der Integralformel für $S_n(x)$ (S. 430). Übrigens kann man an der Skizze der Annäherungskurven (S. 428) ganz deutlich verfolgen, wie die Gibbssche Spitze entsteht.

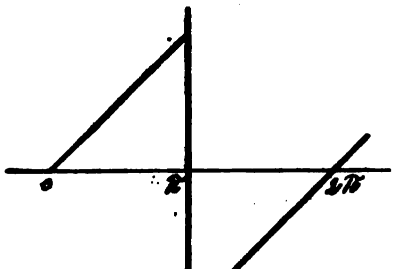
Auf die vielen weiteren sehr interessanten Feinheiten im Verhalten der Annäherungskurven einzugehen, würde mich hier zu weit führen; ich verweise aber gern auf die inhaltreiche und gut lesbare Arbeit von Fejér in Bd. 64 der Mathem. Ann. (1907) (pag. 273).

Ich möchte damit die speziellen Erörterungen über trigonometrische Reihen abbrechen, um einen

Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff

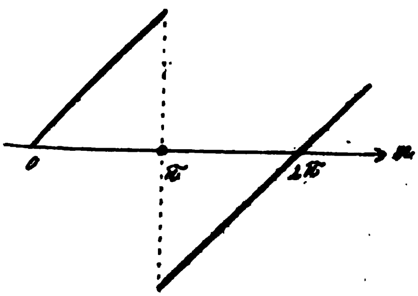
anzuschließen, der sachlich und historisch hier sehr nahe liegt.

festgehalten, und $S_n(x)$ bei variablem x betrachtet, und so der Reihe nach die successiven Annäherungskurven $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ . . . gezeichnet. Die Frage ist nun, was aus diesen Kurven wird, wenn n ins Unendliche läuft, oder, arithmetisch gesprochen: Gegen welche Werte häufen sich die Werte $S_n(x)$, wenn man bei variablem x n ins Unendliche wachsen läßt. Es ist anschaulich, daß jetzt die Grenzfunktion nicht, wie vorhin, isolierte Punkte aufweisen kann, sondern wir müssen einen zusammenhängenden Kurvenzug erhalten. Man hält es nun zunächst für wahrscheinlich, daß dieser Kurvenzug gerade aus den stetigen Ästen von $y = f(x)$ zuzüglich der die Stellen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ an den Unstetigkeitsstellen verbindenden vertikalen Stücke bestehen wird, in unserem Beispiele also die $\sim$-förmige Kurve, die wir früher (S. 428) zeichneten. In der Tat aber zeigt sich, daß das vertikale Stück der Grenzkurve noch stets um ein endliches Stück über bzw. unter $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hinausgeht, so daß diese das hier skizzierte merkwürdige Aussehen hat.



Diese aufgesetzten Türmchen hat man nun zum ersten Male an den vom Michelsonschen Apparat gezeichneten Kurven, Reihe von 160 Gliedern summieren, d. h. aus den gegebenen Koeffizienten a_ν, b_ν die Funktion $f(x)$ herstellen; diese Aufgabe ist natürlich gleichfalls praktisch von höchster Bedeutung.

Der Michelson-Strattonsche Apparat hat nun zum ersten Male die Aufmerksamkeit auf ein sehr interessantes, eigentlich ganz elementares Phänomen gelenkt, das merkwürdiger Weise bis dahin unbeachtet geblieben war; Gibbs hat es 1899 zum ersten Male in der „Nature" [1] zur Sprache gebracht, und man nennt es daher das Gibbssche Phänomen. Lassen Sie mich darüber noch einiges sagen! Der Dirichletsche Satz gibt den Wert der unendlichen trigonometrischen Reihe bei festgehaltenem x gleich $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ an; in dem oben an zweiter Stelle behandelten Beispiele – um einen konkreten Fall ins Auge zu fassen –, stellt also die so aufgefaßte Reihensumme die nebenstehend angedeutete Funktion mit den isolierten Punkten bei π, 3π, ... dar.



Nun hatten wir aber bereits in anderer Weise uns die trigonometrische Approximation verdeutlicht, als es dieses Dirichletsche Verfahren tut, das x festhält und n ins Unendliche wachsen läßt: Wir hatten gerade n

[1] Bd. 59 (1898) pg. 200 = Scientific papers II (New York 1906) pg. 258.

Buch von *Runge*. Sie finden dort die Frage der *numerischen Berechnung der Reihenkoeffizienten* ausführlich behandelt, d. h. die Frage, wie man für eine gegebene Funktion die Integrale für a_ν, b_ν am zweckmäßigsten rasch ausrechnet.

Man hat auch besondere *mechanische Apparate zur Berechnung dieser Koeffizienten* konstruiert, die man *harmonische Analysatoren* nennt. Dieser Name geht auf die Beziehung zurück, die die Entwicklung einer Funktion $y = f(x)$ in trigonometrische Reihen bekanntlich an der *Akustik* besitzt: sie entspricht ja genau der *Zerlegung eines beliebigen Tones $y = f(x)$* (wo x die Zeit, y die Amplitude der Tonschwingung ist) *in „reine Töne"*, d. h. reine Cosinus- und Sinusschwingungen. Unsere Sammlung besitzt einen von *Coradi* in Zürich gebauten Analysator, der die Koeffizienten von je 6 Sinus- und Cosinusgliedern ($\nu = 1 \ldots 6$) zu bestimmen gestattet, im ganzen also 12 Koeffizienten; der Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ muß noch durch ein Planimeter gesondert bestimmt werden. *Michelson* (in Chicago) und *Stratton* haben einen Apparat konstruiert, der gar 160 Koeffizienten ($\nu = 1, 2 \ldots 80$) zu bestimmen gestattet; Sie finden ihn in dem Rungeschen Buche beschrieben. Der Apparat kann auch umgekehrt eine gegebene trigonometrische

Unter diesen Bedingungen stellt also, das zeigt Dirichlet, die unendliche Reihe an jeder Stetigkeitsstelle x genau den Wert $f(x)$ dar:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x).$$

Dirichlet zeigt aber noch weiter, daß auch an einer Sprungstelle x die Reihe konvergiert und zwar gegen das arithmetische Mittel der beiden Werte, in die $f(x)$ übergeht, wenn man sich von rechts und links der Sprungstelle nähert; oder, wie man gewöhnlich schreibt:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

In der Figur sind solche Sprungstellen und die in Frage kommenden Werte markiert.

Diese Dirichletschen Bedingungen für $f(x)$ sind nur ausreichend, keineswegs aber notwendig, damit $f(x)$ durch die Reihe $S(x)$ dargestellt werde; es genügt aber andrerseits nicht, bloß Stetigkeit von $f(x)$ zu fordern, vielmehr kann man sich Beispiele stetiger Funktionen konstruieren, bei denen sich unendlich viele Oszillationen so stark häufen, daß die Reihe $S(x)$ divergiert.

Nach diesen mehr theoretischen Erörterungen will ich jetzt noch von der praktischen Seite der trigonometrischen Reihen etwas sprechen, und verweise da zunächst für die eingehendere Behandlung der Fragen, die hier anknüpfen, auf das schon oben (S. 421) hervorgehobene geben [1]. Man findet den Beweis-Hauptanlage in den meisten Lehrbüchern wiedergegeben, und ich brauche daher hier nicht näher darauf einzugehen. Nur die <u>Bedingungen, denen die Funktion $f(x)$ genügen muß, um durch eine unendliche trigonometrische Reihe darstellbar zu sein</u>, muß ich noch nennen; $f(x)$ sei wieder im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gegeben und darüber hinaus periodisch fortgesetzt; Dirichlet macht dann folgende beiden Annahmen, die man heute schlechtweg als <u>Dirichletsche Bedingungen</u> bezeichnet:

α.) <u>$f(x)$ sei abteilungsweise stetig</u>, d. h. es weise im Intervalle $(0, 2\pi)$ nur eine endliche Anzahl von Sprüngen auf.

β.) <u>$f(x)$ sei abteilungsweise monoton</u>, d. h. man kann das Intervall $(0, 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen teilen, in deren jedem $f(x)$ entweder nicht wächst oder nicht abnimmt – mit anderen Worten <u>$f(x)$ besitze nur endlich viele Maxima und Minima</u>; dadurch sind Funktionen vom Typus $\sin \frac{1}{x}$, wo sich unendlich viele Extrema an der Stelle $x = 0$ häufen, beispielsweise ausgeschlossen.

1.) „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen". Abgedruckt Werke Bd. I pag. 133 – 160 und Ostwalds Klassiker Nr. 116 (Leipzig 1900).

$\xi = x$ nimmt sie einen gleichzeitig mit n wachsenden Wert ($y = \frac{2n+1}{2\pi}$) an. Denken wir uns nun der Einfachheit halber $f(\xi) = 1$, so wird $S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot d\xi$ einfach den Flächeninhalt darstellen, den die y-Kurve mit der ξ-Achse einschließt (in der Figur schraffiert). Man sieht aber unmittelbar, wenn man einiges Gefühl für Kontinuität hat, daß bei hinreichend großem n die Beiträge der Oszillationen rechts sowohl wie links, die abwechselnd positiv und negativ sind, sich kompensieren werden, und daß allein der Beitrag der sehr hohen schmalen Mittelstrecke übrig bleibt; der aber geht, wie man sich leicht klar macht, mit wachsendem n richtig in den Wert $f(x) = 1$ über. Genau ebenso liegen allgemein die Dinge, wenn $f(x)$ irgend eine nicht allzu unstetige Funktion ist, die speziell bei $x = \xi$ stetig verläuft.

Genau solche Ueberlegungen liegen nun, zu praezisen Abschätzungen ausgestaltet, dem Dirichletschen Konvergenzbeweise für die unendliche trigonometrische Reihe zu Grunde.

Diesen Beweis hat Dirichlet zum ersten Mal in Bd. 4 des Crelleschen Journals von 1829 publiziert [1]; später (1837) hat er eine populärere Darstellung in dem Repertorium der Physik von Dove und Moser ge-

1) abgedruckt in Dirichlets Werken Bd. I (Berlin 1889) pg. 117.

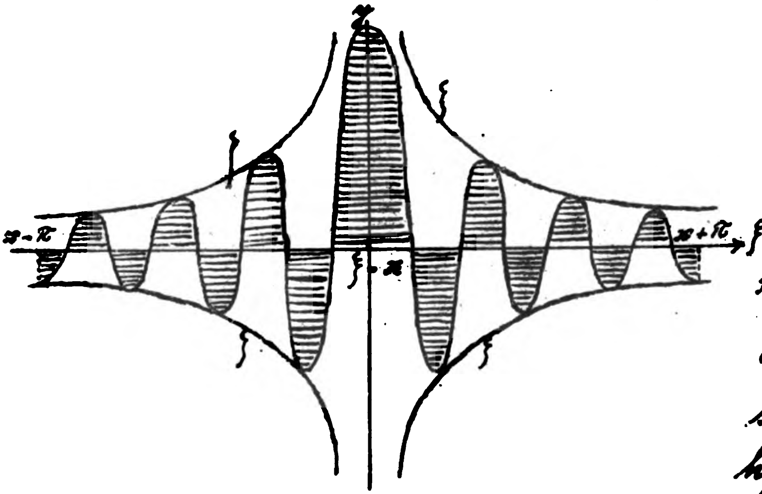
zusammenziehen:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)\left\{\frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \dots + \cos n(x-\xi)\right\}.$$

Die in der Klammer stehende Reihe kann man nun leicht summieren, am bequemsten vielleicht durch Uebergang zur komplexen Exponentialfunktion; man erhält so — auf Details kann ich hier nicht eingehen —, wenn wir noch beachten, daß wir wegen der Periodizität der Integranden die Integration auch von $-\pi$ bis $+\pi$ erstrecken können:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi \cdot f(\xi)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}.$$

Um über den Wert dieser Integrales ein Urteil zu gewinnen, zeichnen wir uns zunächst die Kurven

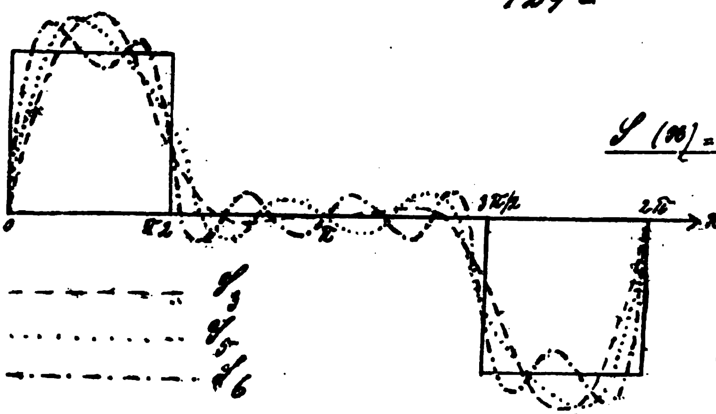


$$\eta = \pm\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}$$

über dem Intervalle $x-\pi \leq \xi \leq x+\pi$ der ξ-Achse, sie haben daselbst offenbar einen hyperbelähnlichen Verlauf. Zwischen diesen Kurvenästen oszilliert nun die Kurve

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)} = \eta\cdot\sin\frac{2n+1}{2}(\xi-x)$$

hin und her, und zwar um so öfter, je größer n ist; bei



und zwar wird:

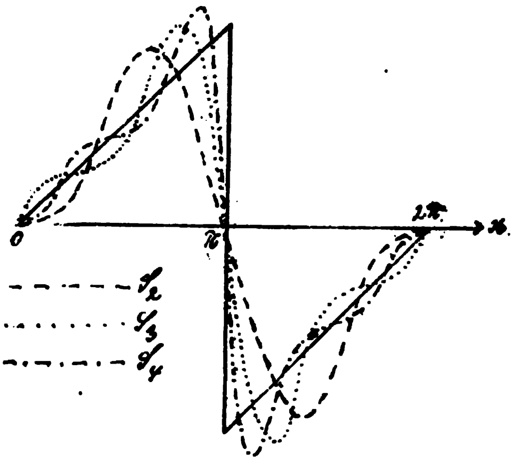
$$S(x) = \sin x + 2\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + 2\cdot\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots$$

Hier ist das Gesetz der Koeffizienten nicht mehr so einfach, als bisher, und demgemäß ist auch die Aufeinanderfolge der Näherungskurven, von denen die 3., 5., 6. gezeichnet ist, nicht mehr so übersichtlich, wie in den vorhergehenden Fällen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie groß allgemein der <u>Fehler an einer bestimmten Stelle</u> x ist, den wir bei Ersetzung von $f(x)$ durch die Summe $S_n(x)$ machen; bisher haben wir uns nur mit dem <u>Integral</u> dieses Fehlers über das ganze Intervall beschäftigt. Wir wollen jetzt die Integrationsvariable in den Integralen (3) (S. 425) für die Koeffizienten a_ν, b_ν mit ξ zum Unterschiede von der als fest betrachteten Stelle x bezeichnen. Dann können wir unsere endliche Reihensumme (1) schreiben:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi\cdot f(\xi)\cdot\Big\{\frac{1}{2} + \cos x\cos\xi + \cos 2x\cos 2\xi + \ldots + \cos nx\cos n\xi$$
$$+ \sin x\sin\xi + \sin 2x\sin 2\xi + \ldots + \sin nx\sin n\xi\Big\},$$

oder, wenn wir je zwei übereinander stehende Summanden

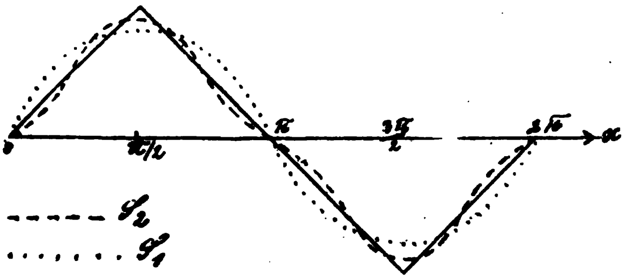


Unstetigkeitsstellen die vertikalen, die Enden jener Strecken verbindenden Strecken ein, so wird die unstetige Funktion durch einen stetigen Linienzug repräsentiert; er sieht aus wie die sw – Striche, die Sie alle am Anfange Ihres Schreibunterrichtes gelernt haben. Wiederum ist die Funktion ungerade, so daß die Cosinusglieder fortfallen, und die Reihenentwicklung lautet:

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \cdots\right).$$

Die Figur stellt die Summen der ersten 2., 3., 4. Glieder dar; auch hier ist besonders interessant, wie sie die Unstetigkeiten von $f(x)$ nachzumachen bestrebt sind, indem sie bei $x = \pi$ z. B. mit immer steilerem Abfall durch Null hindurchgehen.

3.) Das letzte Beispiel sei eine Kurve, die für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ gleich $\frac{\pi}{2}$, für $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ gleich 0 und für $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ endlich gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist, und weiterhin periodisch fortgesetzt wird. Schalten wir an den Unstetigkeitsstellen wieder vertikale Stücke ein, so erhalten wir einen hakenförmigen Zug. Wiederum sind nur die Sinuskoeffizienten von Null verschieden, da eine ungerade Funktion vorliegt.



den gleichen Winkel herunter und endlich bis $x = 2\pi$ wieder unter 45° hinauf, und sie werde über dieses Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt. Berechnen wir nun hierzu die Koeffizienten, so werden alle $\alpha_\nu = 0$, da $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, und es bleiben nur Sinusglieder über, und zwar wird, wie ich hier nur angebe:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - + \dots\right).$$

In der Figur ist nun der Verlauf der Summen der ersten 1 und 2 Glieder skizziert. Sie schließen sich der gegebenen Kurve $y = f(x)$ mehr und mehr an, indem die Anzahl ihrer Schnitte mit ihr ständig wächst. Besonders bemerkenswert ist, wie die Näherungskurven sich mehr und mehr in die Ecken der Kurve bei $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$ hineinpressen, obwohl sie selbst als analytische Funktionen keine Ecke bilden können.

2.) Es gehe die Kurve $f(x)$ von 0 an bis $x = \pi$ geradlinig unter 45° aufwärts, springe dann aber unstetig bis auf $-\pi$ und gehe von da wiederum unter 45° bis $x = 3\pi$ aufwärts; so besteht sie aus lauter parallelen durch die Punkte $x = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ der x-Achse gelegten Strecken. Schalten wir in den immer nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate – ohne das erste ändern zu müssen.

Ich habe nun darzulegen, wie die so bestimmten Summen $S(x)$ die gegebene Funktion $f(x)$ im einzelnen annähern; für solche Untersuchungen scheint mir das Voranstellen einer experimentellen, naturwissenschaftlichen Methode sehr zweckmäßig, nämlich sich für einige konkrete Fälle richtige Figuren der Näherungskurven $S_n(x)$ zu entwerfen. Das gibt eine lebendige Vorstellung der Sache, und wird auch bei einem nicht spezifisch mathematisch veranlagten Menschen Interesse und Bedürfnis nach mathematischer Aufklärung erwecken.

Zu einer früheren Vorlesung (W.-S. 1903/04), in der ich diese Dinge ausführlicher behandelt habe, hat Herr Schimmack, damals mein Assistent, solche Zeichnungen hergestellt, von denen ich Ihnen einige im Original und in Projektionsbildern hier vorführen will:

1.) Die einfachsten Funktionen, für die immer die Koeffizienten definierenden Integrale überhaupt einen Sinn haben, erhalten wir, wenn wir Kurven aus geradlinigen Stücken zusammensetzen. Es gehe nun die Kurve $y = f(x)$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geradlinig unter dem Winkel 45^0 in die Höhe, dann bis $x = \frac{3\pi}{2}$ unter hält; wir können ihre Lösung daher sofort hinschreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos \nu x \, dx & (\nu = 0, 1 \ldots n) \\ b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin \nu x \, dx & (\nu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

So wollen wir die Koeffizienten von $S_n(x)$ fortan stets annehmen; dann wird J in der Tat ein Minimum, und als sein Wert ergibt sich übrigens $\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 - \pi \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2$.

Eine wichtige Bemerkung ist, daß die so erhaltenen Koeffizientenwerte von der speziell angenommenen Anzahl n der Reihenglieder gänzlich unabhängig sind, und daß weiterhin sogar der zu einem Gliede $\cos \nu x$ oder $\sin \nu x$ gehörige Koeffizient genau denselben Wert behält, wenn man dieses Glied allein oder zusammen mit beliebigen andern zur Approximation von $f(x)$ nach demselben Prinzip verwendet. Versucht man z. B. $f(x)$ durch ein einziges Cosinusglied $a_\nu \cos \nu x$ so gut als möglich anzunähern, so daß also

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - a_\nu \cos \nu x)^2 dx = \text{Minimum}.$$

wird, so erhält man gleichfalls gerade den oben angegebenen Wert von a_ν. Das macht dieses Annäherungsverfahren für die Praxis besonders bequem; denn will man eine Funktion, deren Verlauf etwa dem Sinus selbst ähnelt, zunächst durch ein Vielfaches von $\sin x$ approximieren, und sieht man dann hinterher, daß diese Annäherung noch nicht genau genug wird, so kann man noch weitere Glieder additiv hinzufügen –

ist, sieht man hinterher leicht ein, <u>daß die aus diesen $2n+1$ Gleichungen bestimmten Werte dieser Variablen ein wirkliches Minimum von F liefern.</u>

Differenzieren wir unter dem Integralzeichen, so gehen die Gleichungen (2) über in

$$(2')\left\{\begin{array}{l}\int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\,dx=0 \quad \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\cos x\,dx=0 \ldots \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\cos nx\,dx=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\sin x\,dx=0 \ldots \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\sin nx\,dx=0.\end{array}\right.$$

Nun ziehen sich aber die Integrale der Produkte von $S(x)$ mit einem cos oder sin sehr zusammen. Man hat nämlich für $\nu=0,1,\ldots n$:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x).\cos\nu x.dx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos\nu x\,dx+a_1\int_0^{2\pi}\cos x.\cos\nu x\,dx+\ldots+a_n\int_0^{2\pi}\cos nx.\cos\nu x.dx$$
$$+b_1\int_0^{2\pi}\sin x.\cos\nu x\,dx+\ldots+b_n\int_0^{2\pi}\sin nx.\cos\nu x.dx.$$

Nach den bekannten elementaren Integraleigenschaften der goniometrischen Funktionen verschwinden rechts alle Glieder bis auf das Cosinusglied mit dem Index ν, und dieses selbst nimmt den einen einfachen Wert an:

$$\underline{\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos\nu x\,dx=a_\nu.\pi} \qquad (\nu=0,1\ldots n).$$

Daß dies auch für $\nu=0$ gilt, haben wir der Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{2}$ zu a_0 zu danken. Ganz genau so ergibt sich weiter

$$\underline{\int_0^{2\pi} S_n(x)\sin\nu x\,dx=b_\nu.\pi} \qquad (\nu=1,2\ldots n).$$

Aus diesen einfachen Relationen folgt, daß jede der Gleichungen (2') nur noch eine der $2n+1$ Unbekannten entund sind geeignet, die Sache mehr in den Besitz der Praktiker zu bringen.

Ich wende mich nun zur näheren Behandlung unserer Ansätze und habe zunächst über die zweckmäßigste Bestimmung der Koeffizienten a, b bei vorgegebener Gliederzahl n zu sprechen. Hierfür hat bereits Bessel eine Idee herausgearbeitet, die an die Methode der kleinsten Quadrate anschließt. Der Fehler, den man macht, indem man an der Stelle x $f(x)$ durch die Summe $S(x)$ der $2n+1$ trigonometrischen Funktionen ersetzt, ist $f(x) - S(x)$, und ein Maß für die Güte der Darstellung im ganzen Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ einer Periodenlänge der $f(x)$ wird die Summe aller Fehlerquadrate, also das Integral:

$$J = \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x)\right)^2 dx$$

sein. Die zweckmäßigste Approximation von $f(x)$ wird also diejenige Summe $S(x)$ liefern, für die dieses Integral J ein Minimum wird; aus dieser Forderung hat Bessel die $2n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ bestimmt. Notwendige Bedingungen für das Eintreten des Minimums sind aber, da wir J als Funktion dieser $2n+1$ Größen $a_0, \ldots b_n$ aufzufassen haben:

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \ \dfrac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial J}{\partial a_n} = 0, \\ \qquad \dfrac{\partial J}{\partial b_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial J}{\partial b_n} = 0; \end{array} \right.$$

da J eine quadratische wesentlich positive Funktion von $a_0, \ldots b_n$

mal einen Rückschluß auf die praktische Verwendbarkeit: Man darf aus der Konvergenz einer Reihe keineswegs schließen, daß ihre ersten Glieder die Summe auch nur mit einiger Annäherung darstellen, ebenso wie auch umgekehrt die ersten paar Glieder divergenter Reihenentwicklungen zur praktischen Darstellung einer Funktion gut brauchbar sein können. Ich muß das besonders hervorheben, da derjenige, der nur die übliche Darstellung kennt, und dann im physikalischen Praktikum etwa endliche trigonometrische Reihen wirklich anwenden muß, sich in der Regel wohl schließlich mit solchen ungenügenden Schlüssen selbst täuscht.

Noch merkwürdiger erscheint diese übliche Übergehung der endlichen trigonometrischen Reihen, wenn man bedenkt, daß sie schon seit langer Zeit vollständig behandelt sind; die *maßgebenden Ansätze* hat bereits der Astronom *Bessel 1815* gemacht. Näheres über Geschichte und Literatur dieser Fragen finden Sie in dem Encyklopaediereferat von *Burkhardt* über „*trigonometrische Interpolation*" (Enc. II A 9, pag. 642 ff.). Übrigens stimmen die *Formeln*, um die es sich hier handelt, im wesentlichen mit den bei den üblichen Konvergenzbeweisen auftretenden überein; nur die Gedanken, die wir an sie anschließen, haben eine andere Färbung, *stanten Faktoren zweckmäßig approximieren kann*, d. h. ob man nicht $f(x)$ mit einem hinreichend kleinen Fehler durch einen Ausdruck der Form

$$\text{(1.)}\qquad \begin{aligned} S_n(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx \end{aligned}$$

ersetzen darf. Den Faktor $\frac{1}{2}$ fügt man dem konstanten Gliede hinzu, um den später abzuleitenden Ausdruck für die Koeffizienten allgemeingültig zu machen.

Ich muß zunächst wieder Klage über die gewöhnliche Darstellung der *Lehrbücher* führen. Anstatt nämlich das soeben gestellte elementare Problem in den Vordergrund zu stellen, scheint ihnen vielfach die daran anschließende *theoretische Frage, ob man nicht durch eine unendliche Reihe $f(x)$ genau darstellen kann*, das einzige zu sein, was überhaupt Interesse verdient; selbst bei *Scheffers*, dessen Sinn für elementare Darstellung ich neulich rühmte, ist es so. Eine rühmliche Ausnahme macht *Runge* in seiner „*Theorie und Praxis der Reihen*". 1.) Diese Fragestellung ist aber an sich *für die Praxis durchaus uninteressant*, weil man dort selbstverständlich immer nur endlich viele und nicht einmal allzuviele Glieder summieren kann; darüber hinaus gestattet sie aber nicht ein-

---

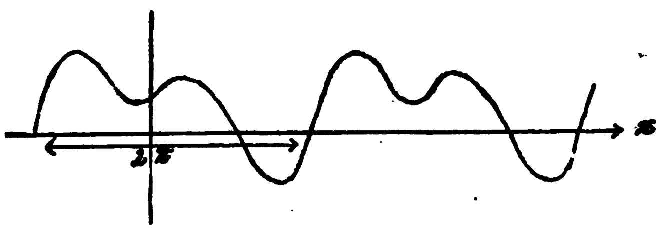
1.) Samml. Schubert 32. Leipzig 1904.

Tage, dann aber auch die *Notwendigkeit einer allgemeinen von der speziellen Dreiecksgeometrie unabhängigen Einführung der goniometrischen Funktionen*, die solche allgemeine Anwendungen vorbereitet.

Ich komme nun endlich zur *letzten Anwendung der goniometrischen Funktionen*, von der ich hier sprechen will:

C. Darstellung periodischer Funktionen durch Reihen goniometrischer Funktionen (trigonometrische Reihen).

Bekanntlich hat man in der Astronomie, in der mathematischen Physik hundertfache Gelegenheit, periodische Funktionen zu betrachten und der Rechnung zu unterwerfen, und da bietet jene Darstellung das hauptsächliche, ständig gebrauchte Hilfsmittel. Wir denken uns der Bequemlichkeit halber die Einheit so gewählt, daß die



gegebene periodische Funktion $y = f(x)$ die *Periode 2π* hat. Die Frage ist dann, *ob man ein solches $f(x)$ durch ein Aggregat der Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen von x bis zum ersten, zweiten ..., allgemein zum n^{ten} hin mit passend gewählten Kon-*

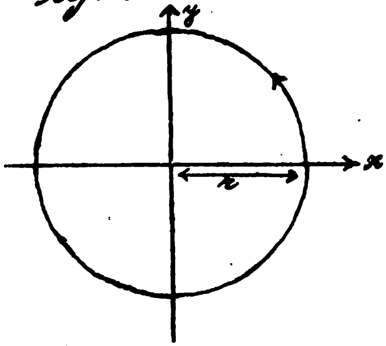
$x + x_1, y + y_1$ möglich ist. Man kann nun die linksherum laufende Pendelbewegung (4) mit einer rechtsherum laufenden

$$x_1 = l.a.\cos\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,(t-t_0) \qquad y_1 = -l.a\sin\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,(t-t_0)$$

kombinieren; dann ist die Bewegung $x+x_1, y+y_1$, wenn man $a = \frac{\alpha}{2}$ wählt, in der Tat gerade die oszillierende Pendelbewegung (5), die wir ableiten wollten.

Bei einer Kritik dieser Betrachtungen kommt es natürlich vor allem darauf an, wie man das Superpositionsprinzip ohne Differentialrechnung begründen oder doch wenigstens plausibel machen will. Besonders bleibt auch immer der Skrupel bei diesen elementaren Darstellungen, ob die verschiedenen, der Reihe nach vorgenommenen Vernachlässigungen sich nicht schließlich zu einem merkbaren Fehler häufen können, selbst wenn jede einzeln zulässig ist. Näher brauche ich das alles wohl nicht auszuführen, denn diese Fragen sind ja durchweg so elementar, daß sie jeder von Ihnen allein wird durchdenken können, nachdem sie nur einmal angeregt sind. Lassen Sie mich zum Schluß nur noch ausdrücklich betonen, daß es sich hier um einen ganz zentralen Punkt der Unterrichtsprobleme handelt: Einmal tritt hier das Bedürfnis der Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung klar an

Nun ist die Herleitung des Pendelgesetzes aber noch keineswegs fertig. Wir haben erst die Möglichkeit einer gleichförmigen Bewegung auf einem Kreise erhalten, die wenn wir in die Ebene dieses Kreises (d. i. bei unseren Vernachlässigungen die Tangentialebene der Kugel) ein x-y-Koordinatensystem legen, in der Sprache der analytischen Mechanik dargestellt wird durch die Gleichungen:



$$(4)\quad \begin{cases} x = l.\alpha.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0) \\ y = l.\alpha.\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0) \end{cases}$$

Wir wollen aber die ebenen Schwingungen des Pendels erhalten, d. h. der Pendelpunkt in unserer x-y-Ebene soll sich auf einer Geraden – der x-Achse – bewegen und seine Bewegungsgleichung muß lauten:

$$(5)\quad x = l.c\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0) \qquad y = 0,$$

damit für den Ausschlagswinkel $\varphi = \frac{x}{l}$ die richtige Gleichung (3) herauskommt. Wir müssen also von den Gleichungen (4) zu (5) gelangen – wohlgemerkt, ohne von den dynamischen Differentialgleichungen Gebrauch machen zu können. Das macht man nun möglich, indem man das Prinzip der Überlagerung kleiner Schwingungen aufstellt, nach dem mit 2 Bewegungen x, y und x_1, y_1 auch die Bewegung die wir ja auch in unserer exakten Ableitung (S. 413) brauchten; denn sie bewirkt gerade den Übergang von „endlichen" zu „unendlich kleinen" Schwingungen. Hingegen ist darauf hinzuweisen, daß die für die Zentrifugalkraft benutzte Formel „elementar" nur durch allerlei Vernachlässigungen abgeleitet werden kann, deren Berechtigung korrekt eben in der Differentialrechnung begründet liegt. Die Definition der Zentrifugalkraft erfordert nämlich im Grunde sogar den Begriff des zweiten Differentialquotienten, und so muß denn die elementare Ableitung auch diesen einschmuggeln, dadurch entstehen, indem man nicht klar aussprechen kann, um was es sich handelt, dem Verständnis die größten Schwierigkeiten, die bei Benutzung der Differentialrechnung gar nicht vorhanden wären. Ich brauche hier um so weniger ins Detail zu gehen, als ich Sie auf einige sehr lesenswerte Programmschriften des verstorbenen Realgymnasialdirektors H. Seeger [1] in Güstrow verweisen kann, in denen u. a. gerade die Herleitungen der Formel für die Zentrifugalkraft in einer unserem Standpunkte durchaus entsprechenden Weise eingehend kritisiert werden.

1) Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Güstrow 1891. Schulprog. Nr. 649). Über die Stellung des hiesigen Realgymn. zu dem Erlaß des preußischen Unterrichtsministeriums vom 1892. (1893 Nr. 653). Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung (1894 Nr. 658).

nimmt. Dann spricht man von der Zentrifugalkraft und leitet die Formel her, daß dieser mit der Geschwindigkeit v umlaufende Punkt die Zentrifugalkraft

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l.\alpha}$$

ausübt, der zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine gleiche, nach dem Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtete Zentripetalkraft entgegenwirken soll. Als solche kommt aber die in der Kreisebene gelegene Komponente $g.\,tg\,\alpha$ der Schwerkraft in Betracht (vgl. Fig.), wofür man bei genügend kleinem α $(g.\alpha)$ setzen kann; wir erhalten also die gewünschte Beziehung in der Gestalt:

$$\frac{v^2}{l\alpha} = g.\alpha \quad \text{oder}$$

$$v = \alpha\sqrt{g.l}\ .$$

Die Schwingungsdauer T des Pendels, das ist die Zeit, in der die ganze Kreisperipherie $2\pi r = 2\pi l\alpha$ durchlaufen wird, ergibt sich daher als:

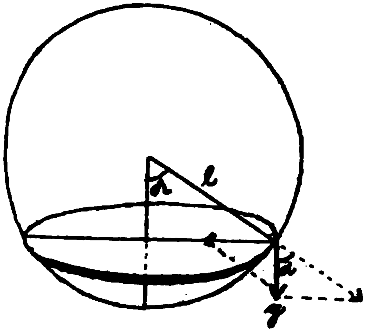
$$T = \frac{2\pi l\alpha}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

d.h. das konische Pendel führt – bei hinreichend kleinem Ausschlage α – eine reguläre Präzession von dieser bestimmten von α unabhängigen Dauer aus.

Wollen wir bereits diesen Teil der Ableitung kontrollieren, so können wir zunächst die Zulässigkeit der Ersetzung von $\sin\alpha$ und $tg\,\alpha$ durch α selbst angeben;

nung nicht genügt, in der nächsten Stunde aber – der Physik – zu den anfechtbarsten Schlüssen, zur kühnsten Verwendung des Unendlichkleinen greift.

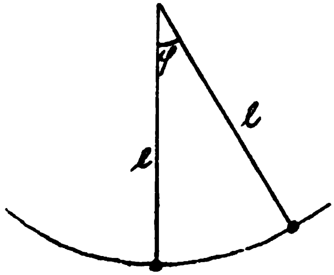
Lassen Sie mich zur näheren Erläuterung kurz den Gedankengang einer solchen *elementaren Ableitung der Pendelgesetze* darstellen, die in der Tat in Lehrbüchern und im Unterricht verwendet wird. Man geht hier aus von dem *konischen Pendel*, d. i. ein *räumliches* Pendel, das sich speziell *mit gleichförmiger Geschwindigkeit v auf einem Kreise um die Vertikale als Achse* bewegen soll, so daß der Pendelfaden einen Kreiskegel beschreibt; das ist die Bewegung, die die Mechanik als reguläre *Präzession* bezeichnet.



Die Möglichkeit einer solchen Bewegung nimmt man nun auf der Schule natürlich als durch das Experiment gegeben an, und fragt nur noch nach der bei ihr obwaltenden *Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und dem konstanten Pendelausschlage $\varphi = \alpha$* (Oeffnungswinkel des vom Faden beschriebenen Kegels).

Dabei bemerkt man zunächst, daß das Pendel einen Kreis vom Radius $r = l . \sin \alpha$ beschreibt, wofür man $r = l . \alpha$ setzen kann, wenn man α hinreichend klein wo die Konstante C die Amplitude, die t_0 Phase der Schwingung heißt; für die Dauer einer Schwingung folgt hieraus der Wert $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ganz anders aber, als bei diesen einfachen und klaren Betrachtungen, die sich bei näherem Eingehen auf die Sache natürlich noch viel anschaulicher gestalten lassen, sieht die Behandlung des Pendelgesetzes im Schulunterricht aus, die man die „elementare" nennt. Da will man ja die konsequente Infinitesimalrechnung durchaus vermeiden, während die Physik gerade hier durch die innerste Natur ihrer Probleme die Verwendung von Infinitesimalmethoden gebieterisch fordert; also verwendet man ad hoc erfundene Verfahren, die Infinitesimalgedanken enthalten, ohne sie beim richtigen Namen zu nennen. Natürlich wird ein solcher Aufbau äußerst kompliziert, wenn er wirklich exakt sein soll; daher trägt man ihn denn tatsächlich vielfach so lückenhaft vor, daß von einem Beweise des Pendelgesetzes eigentlich kaum mehr die Rede sein kann. So entsteht dann die kuriose Erscheinung, daß ein und derselbe Lehrer in der einen Stunde – der Mathematik – an die logische Exaktheit der Schlüsse die allerhöchsten Anforderungen stellt, denen nach seiner noch von der Tradition des 18. Jahrhunderts abhängigen Meinung die Infinitesimalrechnutzung der Infinitesimalrechnung anzugeben pflegen.



Ein Pendel hänge an einem Faden von der Länge l, sein Ausschlagswinkel aus der Gleichgewichtslage sei φ. Da die vertikal abwärts gerichtete Schwerkraft g wirkt, so schließt man aus den Grundgleichungen der Mechanik leicht, daß seine Bewegung durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

bestimmt wird. Für kleine Ausschläge können wir mit hinreichender Annäherung $\sin\varphi$ durch φ ersetzen, und erhalten dann für die sog. <u>unendlich kleinen Pendelschwingungen</u>:

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\cdot\varphi .$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird nun bekanntlich durch Kreisfunktionen gegeben, die hier also, wie früher schon betont, gerade vermöge ihrer <u>Differentialeigenschaften</u> hineinspielen (auf das trigonometrische Auftreten des $\sin\varphi$ in (1) kommt es nicht an), und zwar ist das allgemeine Integral

$$\varphi = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t ,$$

wo A, B willkürliche Konstante sind, oder anders geschrieben:

$$(3) \qquad \varphi = C\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0) ,$$

Tot:

$$(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi - 2\lambda'\pi = (-\lambda'+\mu+\nu-1)\pi = (\lambda+\mu+\nu-1)\pi .$$

In ähnlicher Weise würde sich nun wahrscheinlich, wenn man in ein allgemeines eigentliches Dreieck mit beliebigen Winkeln und Seiten passend eine mehrteilige Membran einzuspannen versucht, und auf Grund der Vorzeichenregel den Inhalt als algebraische Summe der einzelnen Teile bestimmt, die allgemeine Giltigkeit der Inhaltsformel $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$ ergeben, wobei natürlich $\lambda\pi$ ... als wirkliche Winkel der Membran, nicht etwa wie früher als Aussenwinkel anzusehen sind. Die hiermit verlangte Untersuchung ist nun freilich noch nicht ausgeführt, sie bietet aber gewiss keine sehr grossen Schwierigkeiten und ich würde sehr wünschen, dass sie angestellt würde. Besonders wichtig wäre es dabei, die Rolle der uneigentlichen Dreiecke zu klären.

Ich verlasse damit die Trigonometrie und wende mich der zweiten wichtigen Anwendung der goniometrischen Funktionen zu, die auch in den Bereich der Schule fällt:

B. Lehre von den kleinen Schwingungen, insbesondere Pendelschwingungen.

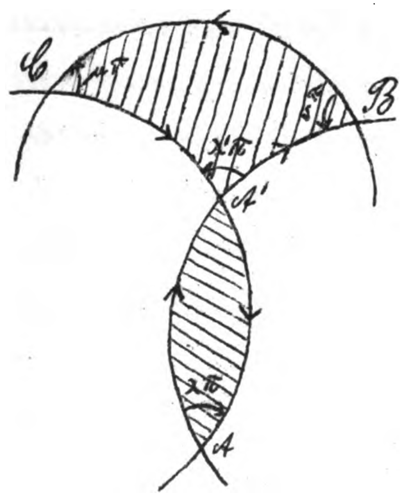
Ich erinnere zunächst in Kürze an die Ableitung des Pendelgesetzes, die wir auf der Universität unter Be-

Festsetzungen die Differenz dieser beiden Flächenstücke zu rechnen haben. Diese Zerspaltung der Dreiecksmembran in einen positiven und einen negativen Teil kann man sich gemäß dem Umlaufssinn der Begrenzung anschaulich vielleicht so vorstellen, daß die Membran bei A' tordiert ist, so daß in dem unteren Zweieck die negativ zu rechnende Rückseite zum Vorschein kommt. Es ist leicht, sich hiernach kompliziertere Beispiele zu bilden.

Ich will nun endlich an demselben Beispiele noch zeigen, daß bei dieser allgemeinen Auffassung des Flächeninhalts die elementare Inhaltsformel der sphärischen Trigonometrie bestehen bleibt. Bekanntlich wird der Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ auf der Kugel vom Radius 1 angegeben durch den sog. „sphärischen Excess" $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$, wofern λ, μ, $\nu > 0$. Wir wollen uns nun klar machen, daß diese Formel auch für unser Dreieck ABC richtig bleibt. Zunächst ist nämlich der Inhalt des Elementardreiecks $A'BC$ sicherlich $(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi$; davon haben wir abzuziehen den Inhalt des Kugelzweiecks AA' von der Winkelöffnung $\lambda'\pi$, der gleich $2\lambda'\pi$ ist (da der Inhalt eines Kugelzweiecks proportional seinem Winkel ist und für den Winkel 2π – die Vollkugel – den Wert 4π erhält.) Wir erhalten also als Inhalt von ABC in der

Bruchstücke bestehen; diese Eigenschaft verleiht ihnen gerade für die funktionentheoretischen Zwecke, zu denen ich sie früher brauchte, ihre große Bedeutung.

Ich will diese Sachlage nun noch an einem Beispiele näher erläutern. Wir betrachten das in der Figur in stereographischer Projektion dargestellte Dreieck ABC, wo A der von dem Bogen BC entferntere Schnittpunkt der größten Kreise BA, CA ist, deren zweiter Schnitt A' heiße.



Die Dreiecksinnenwinkel $\mu\pi$, $\nu\pi$ messen die Drehung der Dreiecksseite AB in BC und BC in CA und sind positiv; hingegen ist nach der Moebiusschen Zeichenregel der Winkel $\lambda\pi$, der die Seite CA in die AB dreht, negativ zu rechnen; wir setzen $\lambda = -\lambda'$. Das Dreieck $A'BC$ bildet dann offenbar ein Elementardreieck mit den Winkeln $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, die sämtlich positiv sind. Umlaufen wir nun den Dreiecksumfang ABC im angegebenen Sinne, so wird das Elementardreieck $A'BC$ in positivem, das Kugelzweieck AA' aber in negativem Sinne umlaufen, und wir werden als Flächeninhalt des Dreiecks nach den Moebiusschen rem (entgegen dem Uhrzeiger) oder negativem Sinne durchläuft. Begrenzt ein sich selbst durchdringender Kurvenzug mehrere Flächenstücke, so ist als ganze von ihm begrenzte Fläche demgemäß die algebraische Summe der einzelnen umlaufenen Teile zu rechnen: in Figur 1 z. B. die Differenz, in Fig. 2 die Summe von den durch verschiedene Schraffierung unterschiedenen Teilen. Diese Festsetzungen sind natürlich lediglich der geometrische Ausdruck von dem, was die analytische Definition des Flächeninhalts von selbst liefert.

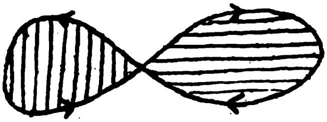


Fig. 1.

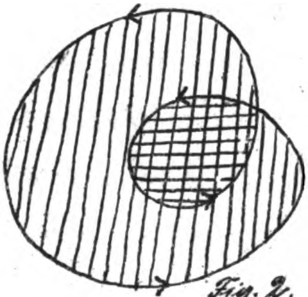
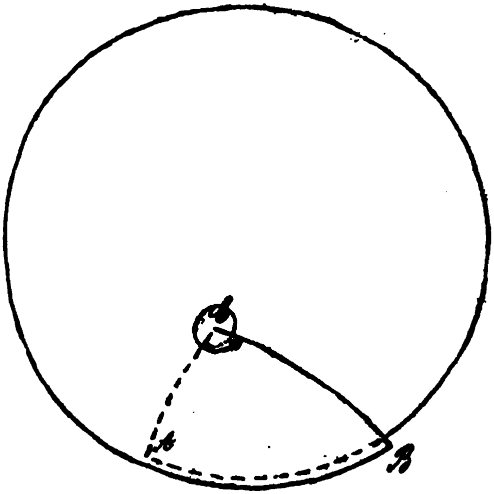


Fig. 2.

Wenden wir dies speziell auf Kreisbogendreiecke an, so zeigt sich in der Tat, daß man einem jeden eigentlichen Dreieck einen Flächeninhalt auf der Kugel zuordnen kann, dessen einzelne Teile nur bei einmaliger Durchlaufung des Dreiecksumfanges teils positiv, teils negativ umlaufen werden, und daher auch mit verschiedenen Vorzeichen in Rechnung zu stellen sind. Die Dreiecke, für die die Ergänzungsrelation gilt, haben alsdann nur das Besondere, daß sie aus einem einzigen in positivem Sinne umlaufenen Raumungsrelationen erhalten bleiben, und findet schließlich ebenso, daß sie auch für die allgemeinste, durch solche Prozesse aufzubauende Dreiecksmembran bestehen bleiben.

Wir müssen nun noch genau zusehen, *wie sich diese Dreiecke mit der Ergänzungsrelation in die vorher besprochene allgemeine Theorie einordnen.* Sie sind offenbar nur *Spezialfälle*, da doch im allgemeinen die Ueberschlagungszahlen der Seiten und Winkel ganz beliebig sind, *Spezialfälle, die eben durch die Möglichkeit der Einspannung einer Membran charakterisiert sind.* Man kann freilich hier zunächst stutzig werden: Wir haben ja gesehen, daß alle eigentlichen Dreiecke – die auch keineswegs sämtlich den Ergänzungsrelationen zu genügen brauchen – ein Kontinuum bilden, und daß man daher jedes von ihnen durch kontinuierlichen Uebergang aus einem Elementardreieck herleiten kann; daher sollte man doch meinen, daß die in das Elementardreieck einzuspannende Membran dabei nicht verloren gehen kann. Die Aufklärung dieser Schwierigkeit ergibt sich erst, wenn man *auch auf Flächeninhalte das Moebiussche Prinzip der Vorzeichenbestimmung* ausdehnt; *danach ist dann eine Fläche positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem man sie im positi-*

lesung „Über die hypergeometrische Funktion"[1]; dort ist übrigens ebenso wie meiner Arbeit in Annalen 37, der Ansatz wesentlich weiter gefaßt, als ich es hier angebe, indem solche „sphärischen Dreiecke" betrachtet werden, die von beliebigen nicht notwendig *größten* Kreisen begrenzt werden. Ich will kurz nur mit einem Worte den *Gedankengang des Beweises* charakterisieren. Man geht von einem elementaren Dreieck aus, in das sich sicher eine Membran einspannen läßt, und gewinnt



aus ihm successive die allgemeinsten zulässigen Membrangestalten, indem man in geeigneter Weise wiederholt *kreisförmige Membranscheiben mit Verzweigungspunkten an den Ecken* einhängt. Die Figur zeigt als Beispiel – in stereographischer Projektion gedacht – ein Dreieck A B C, das aus einem elementaren durch Einhängung der einen vom größten Kreise A B begrenzten Halbkugel entsteht, wodurch denn sowohl die Seite A B, als der Winkel bei C sich einmal über-*schlägt*; man sieht, daß bei diesem Prozeß die Ergän-

[1] W.-S. 1893/94. Ausgearb. v. E. Ritter. – Neudruck. Leipzig 1906. pag. 354 ff.

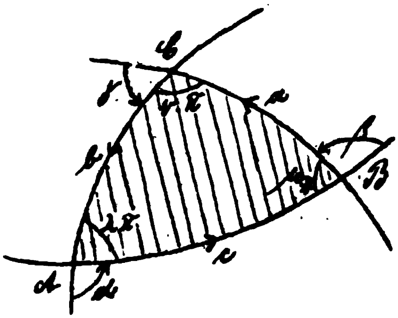
nur, die ich in meiner Arbeit „*Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe*" (Mathem. Annalen 37; 1888) *Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie* genannt habe. Sie lauten, wenn $\mathfrak{E}(x)$ die größte in x enthaltene *positive ganze* Zahl bezeichnet ($\mathfrak{E}(x) \leqq x$):

$$\mathfrak{E}\left(\frac{l}{2}\right) = \mathfrak{E}\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$$
$$\mathfrak{E}\left(\frac{m}{2}\right) = \mathfrak{E}\left(\frac{-\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right)$$
$$\mathfrak{E}\left(\frac{n}{2}\right) = \mathfrak{E}\left(\frac{-\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right),$$

und da $\mathfrak{E}\left(\frac{l}{2}\right)$ z. B. die in der Seite $l\cdot\pi$ enthaltenen Vielfachen von 2π angibt, so *bestimmen diese Relationen gerade die fraglichen Überschlagungszahlen der Seiten $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, wenn man die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ incl. ihrer Überschlagungszahlen kennt*. Man sieht insbesondere leicht ein, daß bei positiven λ, μ, ν höchstens *eine* der 3 Zahlen $\lambda-\mu-\nu$, $-\lambda+\mu-\nu$, $-\lambda-\mu+\nu$ positiv sein kann; also kann auch nur einer der 3 Argumente der rechten Seiten größer als 1 sein, und da $\mathfrak{E}(x) = 0$ für $x < 1$, ist nur eine der 3 Seitenüberschlagungszahlen von Null verschieden. *Es kann sich also bei einer Dreiecksmembran höchstens eine Seite und zwar die dem größten Winkel gegenüber liegende überschlagen* ($> 2\pi$ sein).

Was den *Beweis* dieser *Ergänzungsrelationen* angeht, so verweise ich auf meine autographierte Vorspannt sind.

Freilich wird es dabei nicht mehr angebracht sein, die „Außenwinkel" α, β, γ der Dreiecke in Betracht zu ziehen, wie wir das bisher aus Symmetriegründen taten, sondern wir werden von denjenigen Winkeln reden, die die Membran selbst an den Eckpunkten bildet,



und die wir kurzweg Innenwinkel der Dreiecke nennen wollen; ich bezeichne sie, wie ich es gewohnt bin, mit $\lambda\cdot\pi$, $\mu\cdot\pi$, $\nu\cdot\pi$. Auch diese Winkel können unmittelbar als unbeschränkt variable, nur positive Größen angesehen werden, da wir Windungspunkte in den Ecken der Membran nicht ausschließen wollen. Analog seien die absoluten Längen der Seiten mit $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ bezeichnet, die gleichfalls unbeschränkt positiv variabel sind. Nun dürfen sich aber jetzt nicht mehr, wie früher, alle Seiten und Winkel unabhängig von einander beliebig oft überschlagen, d. h. beliebige additive Vielfache von 2π enthalten, sondern die Tatsache, daß eine einzige zusammenhängende Membran mit diesen Seiten und Winkeln existiert, drückt sich in gewissen Relationen zwischen den Ueberschlagungszahlen ecks entschieden ist.

Der Uebergang zum allgemeinen Dreieck $a \ldots \alpha \ldots$ vom zugehörigen Moebiusschen aus wird nach dem oben Gesagten vermittelt durch Formeln von der Art:

$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi,$$
$$\alpha = \alpha_0 + \nu_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + \nu_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + \nu_3 \cdot 2\pi,$$

und es gilt nun der Satz: Je nachdem die Summe der 6 ganzen Zahlen $n_1 + n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ gerade oder ungerade ist, behält das allgemeine Dreieck den Charakter des reduzierten Dreiecks als eigentliches oder uneigentliches, oder es wechselt ihn. Danach ist der Charakter eines jeden Dreiecks bestimmt.

Ich schließe diesen Abschnitt mit einigen Erörterungen über den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke. Davon ist in den Studyschen Untersuchungen und auch in der Darstellung von Weber-Wellstein garnicht die Rede; wohl aber kommt dieser Begriff in meinen älteren funktionentheoretischen Untersuchungen über Kreisbogendreiecke zur Geltung; während bisher das Dreieck nichts als der Inbegriff dreier nur den Cosinus- und Sinus-Sätzen genügenden Winkel und Seiten war, handelt es sich da um bestimmte von diesen Seiten begrenzte Flächenstücke, gewissermaßen um Membrane, die zwischen den drei Seiten mit passenden Winkeln eingeüber 2π hinaus noch nicht einging. Nun wollen wir zunächst durch eine kleine Tabelle entscheiden, wann ein Moebiussches Dreieck eigentlich und uneigentlich ist. Sie finden diese in etwas weniger übersichtlicher Form in Weber-Wellstein (pag. 352 u. 380), wo auch (pag. 348/349) Figuren für die Typen eigentlicher und uneigentlicher Dreiecke stehen. Wir nennen, wie das üblich ist, einen Winkel überstumpf, wenn er zwischen π und 2π liegt, und wenden diese Bezeichnung der Kürze halber auch auf die Seiten des sphärischen Dreiecks an. Dann haben wir im ganzen je 4 typische Fälle beider Arten aufzuzählen:

I. Eigentliche Moebiussche Dreiecke:

1.) 0 Seiten überstumpf;	0 Winkel	überstumpf.
2.) 1 Seite " " ;	2 anliegende Winkel	" " .
3.) 2 Seiten " " ;	1 eingeschlossener Winkel	" " .
4.) 3 Seiten " " ;	3 Winkel	" " .

II. Uneigentliche Moebiussche Dreiecke:

1.) 0 Seiten überstumpf ;	3 Winkel	überstumpf.
2.) 1 Seite " " ;	1 gegenüberlieg. Winkel	" " .
3.) 2 Seiten " " ;	2 " " "	" " .
4.) 3 Seiten " " ;	0 Winkel	" " .

Andere als die hier aufgezählten Fälle gibt es nicht, sodaß damit in der Tat über die Art jedes Moebiusschen Drei-nun den Studyschen Satz auch kurz so aussprechen, *daß die Gesamtheit aller sphärischen Dreiecke in ein Kontinuum der eigentlichen und eines der uneigentlichen Dreiecke zerfällt*. Sie finden übrigens nähere Ausführungen dazu und einen Beweis des Satzes im Weber-Wellstein;[1] ich gebe hier nur in möglichst übersichtlicher Weise die Resultate an.

Ich muß etwas Näheres über den *Unterschied beider Dreiecksarten* sagen: Geben wir irgend ein sphärisches Dreieck, d. h. ein „zulässiges Wertsystem" der $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, deren cos und sin den Formeln erster Stufe genügen, und die daher einen Punkt der $M_3^{(6)}$ darstellen; *wie können wir entscheiden, ob es sich um ein eigentliches oder uneigentliches Dreieck handelt?* Wir bilden dazu zunächst die kleinsten positiven Reste a_0, $b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ der gegebenen Zahlen in Bezug auf den Modul 2π:

$$0 \leqq a_0 < 2\pi \quad \dots \quad 0 \leqq \alpha_0 < 2\pi \quad \dots$$

$$a_0 \equiv a \pmod{2\pi} \quad \dots \quad \alpha_0 \equiv \alpha \pmod{2\pi} \quad \dots$$

Ihre cos und sin stimmen mit denen von $a \dots, \alpha \dots$ überein, so daß sie wiederum ein sphärisches Dreieck repräsentieren, das wir das dem ursprünglichen zugehörige *reduzierte* oder *Moebiussche Dreieck* nennen wollen, da Moebius selbst auf Veränderlichkeit der Stücke

[1] Bd. II pag. 385 ff. (§ 47).

Bestimmungsstücken $\cos a \ldots$ oder $\cos \frac{a}{2} \ldots$, da jene transzendente, diese aber algebraische Funktionen der gewöhnlichen räumlichen Koordinaten der Dreiecksecken sind. In diesem R_6 zeichnet sich die Gesamtheit aller sphärischen Dreiecke als „*transzendente Mannigfaltigkeit*" *$M_3^{(t)}$* ab, deren Bild im R'_{12} die vorhin betrachtete algebraische M'_3 war. Da diese aber in zwei Stücke zerfiel und die abbildenden Funktionen $\cos \frac{a}{2} \ldots$ eindeutige stetige Funktionen der transzendenten Koordinaten sind, muss auch die transzendente $M_3^{(t)}$ in zwei getrennte Stücke zerfallen. *Der Studysche Satz lautet nun: Die transzendente $M_3^{(t)}$ der überhaupt bei einem sphärischen Dreieck allgemeinster Art auftretenden Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zerfällt entsprechend dem doppelten Vorzeichen in der Gaußschen Formeln in zwei von einander getrennte Stücke, von denen jedoch jeder ein in sich zusammenhängendes Kontinuum darstellt.* Das Wichtigste dabei ist das *Ausschließen jedes weiteren Zerfallens*; man kann also nicht etwa durch weiteres Verfolgen der trigonometrischen Formeln zu ähnlichen ebenso tief greifenden Einteilungen der sphärischen Dreiecke gelangen. Man nennt nun die Dreiecke des ersten, dem oberen Zeichen der Gaußschen Formeln entsprechenden Stückes *eigentliche Dreiecke*, die des anderen *uneigentliche*, und kann *in kubischen Gleichungen bestimmt und zerfällt daher in zwei getrennte algebraische Mannigfaltigkeiten:* $\overline{M}_3$, für die das eine, und M_3, für die das andere Vorzeichen gilt. Durch diese merkwürdige Erscheinung erhalten jene Formeln die größte Bedeutung für die Theorie der sphärischen Dreiecke, und werden viel mehr, als nur eine Umformung der alten Gleichungen, die höchstens zur Erleichterung der trigonometrischen Rechnung gut ist, wie das Delambre und Mollweide annahmen; nur *Gauß* hatte eine tiefere Einsicht, denn er weist ausdrücklich auf die Möglichkeit eines Vorzeichenwechsels hin, „wenn man die Idee des sphärischen Dreiecks in größter Allgemeinheit auffaßt"; es scheint mir daher wohl berechtigt, die Formeln nach Gauß zu nennen, wenn er die Priorität der Veröffentlichung auch nicht besitzt.

Die ganze Tragweite dieser Erscheinung hat aber erst *Study* erkannt und in seiner zitierten Arbeit von 1894 entwickelt. Sein Hauptresultat läßt sich am bequemsten aussprechen, wenn man den 6-dimensionalen Raum R_6 betrachtet, der die Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ selbst, als unbeschränkte Variable aufgefaßt, zu Koordinaten hat; wir nennen sie *transzendente Bestimmungsstücke* des Dreiecks im Gegensatz zu den *algebraischen* wird daher bei ihrem Studium am besten die 12 Größen

$$\cos\frac{a}{2},\ \sin\frac{a}{2},\ \ldots,\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \ldots$$

als Koordinaten eines neuen zwölfdimensionalen Raumes R'_{12} betrachten, in dem die sphärischen Dreiecke wiederum eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M'_3 bilden. Vor allem kommen hier jene eleganten Formeln in Betracht, die am Anfang des vorigen Jahrhunderts fast gleichzeitig unabhängig von einander von Delambre (1807), Mollweide (1808) und endlich Gauß 1809 in der „Theoria motus corporum coelestium Nr. 54)[1] publiziert worden sind. Es sind 12 Formeln, die durch zyklische Vertauschung aus:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \pm\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \mp\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \mp\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

entstehen. Das Wesentliche und Neue an ihnen den Formeln erster Stufe gegenüber ist nun das doppelte Vorzeichen, mit dem es sich so verhält: Für ein und dasselbe Dreieck gelten in sämtlichen 12 Formeln gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen, und es gibt Dreiecke sowohl der einen als der andern Art. Die M'_3 der sphärischen Dreiecke in dem vorhin definierten R'_{12} wird also durch zwei ganz verschiedene Systeme von je

[1] Abgedruckt Werke Bd. VII. (Leipzig 1906) pag 67.

tangenten der halben Winkel und Seiten verwendet; denn da $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ (und ebenso natürlich $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$) eine Fundamentalfunktion ist, durch die sich $\cos a$ und $\sin a$ eindeutig ausdrücken, lassen sich die sämtlichen *trigonometrischen Gleichungen als algebraische Relationen zwischen $\operatorname{tg}\frac{a}{2} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ schreiben. Die sphärischen Dreiecke bilden daher jetzt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_3 in dem sechsdimensionalen Raume R_6*, der $\operatorname{tg}\frac{a}{2} \ldots \operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ zu Koordinaten hat. Von dieser M_3 zeigt Frl. Chisholm, daß sie von der *Ordnung* 8 ist, und als *voller Schnitt dreier Flächen 2. Grades* (quadratischen Gleichungen) des R_6 darstellbar ist, und sie untersucht auch die weiteren Fragen, die sich hier im Sinne der oben fixierten Gesichtspunkte anschließen.

Man nennt die Gruppe von Formeln der sphärischen Trigonometrie, über die ich bisher sprach, und die sin und cos der Seiten und Winkel verknüpfen, *Formeln erster Stufe*, und stellt ihnen eine wesentlich verschiedene Formelgruppe als *Formeln zweiter Stufe* entgegen. Das sind *algebraische Gleichungen*, die zwischen den *trigonometrischen Funktionen der halben Winkel und Seiten* bestehen, und man

nahe der sphärischen Trigonometrie angeeignet hat.
Meine Fragen sind:

1.) Was ist die Ordnung der M_3?

2.) Welches sind die niedersten Gleichungen, durch die sich die M_3 rein darstellen läßt?

3.) Welches ist das volle System der unabhängigen die M_3 enthaltenden Gleichungen, d. h. der Gleichungen $f_1 = 0 \dots f_n = 0$, aus denen jede andere durch M_3 gehende Fläche mit ganzen rationalen Faktoren $m_1 \dots m_n$ linear in der Form $m_1 f_1 + \dots + m_n f_n = 0$ komponierbar ist? Hierzu können mehr Gleichungen nötig sein, als unter 2) verlangt.

4.) Welche algebraischen Identitäten (sog. Syzygien) bestehen zwischen diesen n Formen $f_1 \dots f_n$?

Man kann sich über diese Dinge an Untersuchungen orientieren, die in genau derselben Richtung von nur wenig verschiedener Fragestellung ausgehend bereits vorliegen. Sie sind in der Göttinger Dissertation von Frl. Chisholm [1] (der jetzigen Frau Young) von 1894 enthalten, die übrigens die erste von einer Dame in Preußen angefertigte Doktorarbeit ist. Von den verschiedenen Ansätzen der Frl. Chisholm ist wesentlich der bemerkenswert, daß sie als unabhängige Koordinaten die Co-

[1] Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1895.

Ganzen 15 Gleichungen für unsere M_3 im R_{12} aufgestellt.

Nun reichen zur Festlegung eines dreidimensionalen Gebildes im R_{12} im allgemeinen keineswegs $12 - 3 = 9$ Gleichungen hin, da schon in der gewöhnlichen Geometrie des R_3 bekanntlich keineswegs jede Raumkurve als voller Schnitt zweier Flächen darstellbar zu sein braucht; das einfachste Beispiel ist da die Raumkurve dritter Ordnung, zu deren Festlegung mindestens drei Gleichungen notwendig sind. Man sieht auch in unserem Falle leicht, daß die 9 Gleichungen (1) und (2) die M_3 noch nicht festlegen; es kann nämlich bekanntlich aus dem Cosinussatz der Sinussatz nur bis auf ein Vorzeichen hergeleitet werden, das man dann durch geometrische Ueberlegungen zu bestimmen pflegt. Man wird nun zu wissen wünschen, welche und wieviele der trigonometrischen Gleichungen denn eigentlich unsere M_3 vollkommen bestimmen. Überhaupt möchte ich hier 4 bestimmte Fragen formulieren, auf die die bisherige Literatur keine präzise Antwort zu geben scheint; es könnte sich wohl lohnen, sie eingehend zu untersuchen, und das dürfte auch nicht einmal besonders schwer sein, wenn man sich nur eine gewisse Geschicklichkeit in der Handhabung der For-weil $\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1$ ist, haben wir zunächst einmal die 6 quadratischen Relationen:

$$(1) \qquad x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2 \dots 6)$$

die – geometrisch gesprochen – 6 Zylinderflächen zweiter Ordnung $F^{(2)}$ durch die M_3 darstellen.

Weitere 6 Formeln gibt der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie, der in unserer Bezeichnung heißt:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha,$$

woraus durch Polarisation entsteht:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos a;$$

sie bestimmen mit 4 weiteren durch zyklische Vertauschung von a, b, c und α, β, γ entstehenden Formeln im ganzen 6 kubische Flächen $F^{(3)}$ durch die M_3:

$$(2) \qquad x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 x_4, \quad x_2 = x_3 x_1 - y_3 y_1 x_5, \quad x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2 x_6$$

$$(3) \qquad x_4 = x_5 x_6 - y_5 y_6 x_1, \quad x_5 = x_6 x_4 - y_6 y_4 x_2, \quad x_6 = x_4 x_5 - y_4 y_5 x_3.$$

Endlich können wir noch den Sinussatz heranziehen, der sich durch das Verschwinden der Unterdeterminanten folgender Matrix ausdrückt:

$$\begin{vmatrix} \sin a, & \sin b, & \sin c \\ \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{vmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$(4) \qquad y_2 y_6 - y_3 y_5 = y_3 y_4 - y_1 y_6 = y_1 y_5 - y_2 y_4 = 0.$$

Das stellt 3 quadratische $F^{(2)}$ dar, von denen allerdings nur 2 linear unabhängig sind. – So haben wir im *mehrdimensionaler Räume eingeordnet.*

Diese M_3 muß nun verschiedene einfache Symmetrieen besitzen. So hatte der Polarisierungsprozeß ergeben, daß man durch Vertauschung von a, b, c mit α, β, γ stets wieder ein sphärisches Dreieck erhält; auf unsere neue Bezeichnung übertragen heißt das, daß man aus jedem Punkte der M_3 einen weiteren ihr zugehörigen erhält, indem man $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ beziehungsweise mit $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$ vertauscht. Weiterhin existieren zu jedem Dreieck, entsprechend der Zerlegung des Raumes in 8 Oktanten durch die Ebenen der 3 größten Kreise, 7 *Nebendreiecke*, deren Stücke aus denen des ursprünglichen durch Vorzeichenwechsel und Addition von π hervorgehen; das gibt zu jedem Punkte der M_3 7 weitere Punkte deren Koordinaten $x_1 \dots y_6$ durch Vorzeichenwechsel entstehen. Die Gesamtheit dieser Symmetrieen führt schließlich zu einer gewissen *Gruppe von Vertauschungen und Vorzeichenwechseln der Koordinaten des R_{12}, die die M_3 in sich transformiert.*

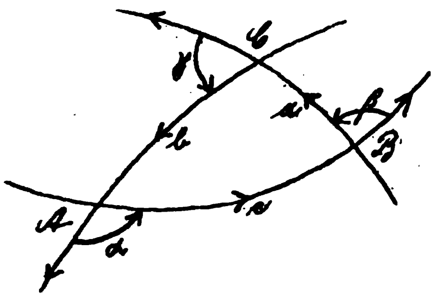
Die wichtigste Frage ist nun die nach den *algebraischen Gleichungen, denen die Koordinaten der Punkte von M_3 genügen und die die Gesamtheit der trigonometrischen Formeln bilden.* Da im-variabel sein können, etwa zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie stellen eine Anzahl von Relationen zwischen ihnen, oder – genauer gesagt – von algebraischen Relationen zwischen ihren 12 Cosinus und Sinus dar, durch die nur 3 dieser 12 Größen willkürlich variabel gelassen werden können, während die anderen 9 algebraisch von ihnen abhängen; indem wir zu den cos und sin übergehen, leisten wir natürlich auf die Festlegung der additiv hinzutretenden Vielfachen von 2π Verzicht. Fassen wir die Trigonometrie überhaupt als Inbegriff aller möglichen solchen algebraischen Relationen auf, so werden wir moderner Denkweise entsprechend ihre Aufgabe auch so fassen können: Wir deuten die Größen

$$x_1 = \cos a,\quad x_2 = \cos b,\quad x_3 = \cos c,\quad x_4 = \cos \alpha,\quad x_5 = \cos\beta,\quad x_6 = \cos\gamma$$
$$y_1 = \sin a,\quad y_2 = \sin b,\quad y_3 = \sin c,\quad y_4 = \sin \alpha,\quad y_5 = \sin\beta,\quad y_6 = \sin\gamma$$

als Koordinaten eines zwölfdimensionalen Raumes R_{12}; die Gesamtheit aller derjenigen seiner Punkte, die wirklich möglichen sphärischen Dreiecken $a \ldots \gamma$ entsprechen, stellt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_3 dieses R_{12} dar, und diese M_3 im R_{12} soll studiert werden. Damit ist die sphärische Trigonometrie der allgemeinen analytischen Geometrie und übersichtlicher gestalten, ist eine altbekannte Erscheinung. Den tieferen Grund dafür können wir in folgendem erblicken: Der oben erörterte Polarisationsprozeß gibt zu jedem auf Grund der Möbiusschen Verabredungen festgelegten Dreiecke völlig eindeutig ein anderes Dreieck, das „Polardreieck" des ersten, und man sieht leicht ein, daß dasselbe bei Zugrundelegung unserer neuen Definitionen einfach die Winkel des Ausgangsdreiecks zu Seiten und dessen Seiten zu Winkeln hat. Demgemäß muß jede in dieser Bezeichnung geschriebene Formel der sphärischen Trigonometrie auch gelten, wenn wir in ihr a, b, c bzw. mit α, β, γ vertauschen, so daß stets eine einfache Symmetrie vorhanden sein muß. Bei der elementaren Winkel- und Seitenmessung hingegen besteht nicht diese einfache Symmetrie, sondern die Beziehung zwischen Dreieck und Polardreieck hängt davon ab, wie man im einzelnen Falle Winkel und Seiten annimmt, und über die Doppeldeutigkeit des Poles eines ohne Umlaufssinn gegebenen Kreises entscheidet.

Es ist nun klar, daß von den so definierten 6 Bestimmungsstücken des sphärischen Dreiecks nur drei unabhängig von einander kontinuierlich

Sinne umlaufen muß, also man von B nach C, von C nach A, von A nach B gelangt. Die so bestimmten Längen a, b, c, die beliebige reelle Größen sein können, heißen Seiten des sphärischen Dreiecks; natürlich sind sie auf die Kugel vom Radius 1 bezogen gedacht. Die Winkel werden dann so definiert: α entsteht durch diejenige Drehung im positiven Sinne, die aus dem in A einmündenden positiven Sinne C A den von ihm ausgehenden positiven Sinn A B macht, wobei noch additiv hinzutretende Vielfache von 2π

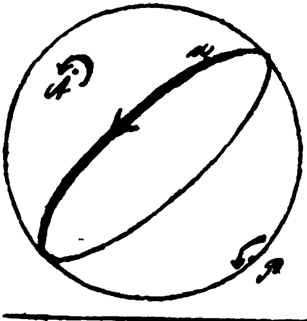


willkürlich gegeben werden dürfen, und Analoges gilt für die anderen Winkel. Betrachten wir ein gewöhnliches Elementardreieck, wie nebenstehend angedeutet, und legen die Richtungen der Seiten so fest, daß $a, b, c < \pi$ werden; dann werden, wie man sieht, die Winkel α, β, γ nach unserer neuen Definition die Außenwinkel des Dreiecks, nicht wie bei der elementaren Festsetzung, seine Innenwinkel.

Daß hierbei, bei Ersetzung der gewöhnlich gemessenen Dreieckswinkel durch ihre Supplemente, die Formeln der sphärischen Trigonometrie sich symmetrischer als positiv nehmen. Ebenso müssen wir zweitens jedem größten Kreise der Kugel einen Durchlaufungssinn zuordnen, und hier können wir nicht mit Festsetzung für einen Kreis und stetigem Uebergang zu allen anderen auskommen, da man jeden Kreis mit jedem andern auf zwei wesentlich verschiedene Arten zur Deckung bringen kann. Wir werden daher jedem in Betracht kommenden Kreise einzeln einen Sinn zuordnen, und auch einen und denselben Kreis gewissermaßen als zwei verschiedene Gebilde betrachten, je nachdem wir ihm den einen oder anderen Sinn beigelegt haben. Nach diesen Festsetzungen läßt sich jedem größten Kreise a eindeutig ein Pol P zuordnen, nämlich derjenige seiner beiden Pole im elementaren Sinne, von dem aus sein Sinn als positiv erscheint; ebenso gehört umgekehrt jedem Punkte eindeutig ein „Polkreis" mit bestimmtem Umlaufssinne zu. Damit ist der in der Trigonometrie so wichtige „Polarisierungsprozeß" völlig eindeutig festgelegt.

Sind nun drei Punkte A, B, C auf der Kugel gegeben, so sind noch einige Angaben nötig, ehe ein sphärisches Dreieck mit diesen Ecken eindeutig bestimmt ist. Zunächst muß auf jedem der 3 größten Kreise durch A, B, C ein Sinn festgelegt sein, und angegeben werden, wie oft man auf ihm in diesem den können; man hat dann von Seiten, die sich überschlagen, und Winkeln, die sich mehrfach um ihren Scheitel winden, zu reden. Dazu wird es aber nötig, über die Vorzeichen dieser Größen bezw. den Sinn, in dem man sie zu messen hat, bestimmte Verabredungen zu treffen. Es ist nun das Verdienst des großen Geometers Möbius, wie überhaupt in der Geometrie, so auch in der sphärischen Trigonometrie das Prinzip der Vorzeichen konsequent zur Geltung gebracht zu haben, womit erst den allgemeinen Untersuchungen mit unbeschränkt veränderlichen Größen Bahn gebrochen war; besonders kommt hier die Arbeit „Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit"[1] in Betracht.

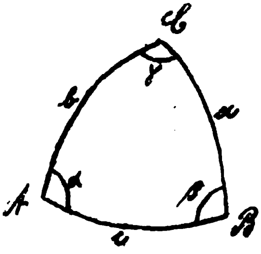
Diese Vorzeichenbestimmungen beginnen damit, daß man einen bestimmten Drehungssinn festlegt, in dem man um jeden Punkt A der Kugel den Winkel positiv messen will; ist das für einen beliebigen Kugelpunkt geschehen, so überträgt sich derselbe Sinn nach der Stetigkeit sofort auch auf alle anderen Kugelpunkte. Wir mögen etwa, wie es üblich ist, den bei Betrachtung von der Außenseite der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Umlaufssinn



1.) Berichte über die Verhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Klasse. 1860 Bd. 12. = Ges. Werke II (Leipzig 1886), pag. 71 ff.

noch heute nicht als abgeschlossen gelten kann, sondern noch immer viele unbearbeitete Fragen und Probleme relativ elementaren Charakters enthält, deren Bearbeitung mir nicht unlohnend erscheint: ich meine die sphärische Trigonometrie. Sie finden diesen Gegenstand gerade auch in Weber-Wellstein sehr ausführlich behandelt, und zwar kommen dort wesentlich die Gedanken zur Geltung, die Study in seiner fundamentalen Arbeit „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen"[1] entwickelt hat. Ich will Ihnen im folgenden einen Überblick über alle hierhin gehörigen Theorieen zu geben versuchen, und insbesondere auch auf die noch offenen Fragestellungen hinweisen.

Die elementare Auffassung eines sphärischen Dreiecks bedarf kaum der näheren Erläuterung: drei Punkte der Kugel bestimmen (wenn nicht gerade 2 von ihnen diametral liegen) genau ein Dreieck, in dem jeder der 3 Winkel und jede Seite zwischen 0 und π liegt.



Es erweist sich aber bei weitergehenden Untersuchungen bald als zweckmäßig, die Seiten und Winkel als unbeschränkt veränderliche Größen anzunehmen, die auch größer als π oder 2π oder Vielfache davon wer-

1.) Abhandl. der math.-phys. Klasse der K. Sächsischen Gesellsch. d. Wissenschaften. Bd. XX. Nr. II (Leipzig 1893).

A. Trigonometrie, insbesondere sphärische Trigonometrie.

Wir haben hier eine uralte Wissenschaft vor uns, die schon in Aegypten in hoher Blüte stand, gefördert durch die Anforderungen zweier wichtigen Wissenschaften: der Geodäsie, die die Lehre vom ebenen und der Astronomie, die die vom sphärischen Dreieck brauchte. Für die Geschichte der Trigonometrie haben wir eine reichhaltige Monographie in A. v. Braunmühls Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie 1/. Ueber die praktische Seite der Trigonometrie informiert man sich am besten in E. Hammers Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie 2/, über die theoretische in dem zweiten Bande der oft genannten Encyklopaedie der Elementarmathematik von Weber-Wellstein. 3/

Ich kann im Rahmen dieser Vorlesung natürlich nicht die ganze Trigonometrie systematisch entwickeln, das ist Sache spezieller Studien; übrigens wird ja hier in Göttingen die praktische Trigonometrie in den regelmäßigen Vorlesungen über Geodäsie und sphärische Astronomie ausgiebig berücksichtigt. Vielmehr möchte ich nur über ein sehr interessantes Kapitel der theoretischen Trigonometrie zu Ihnen sprechen, das trotz seines hohen Alters

1.) 2 Bde. Leipzig 1900 u. 1903.
2.) Stuttgart 1906
3.) Encyklopaedie der element. Geometrie. Bearb. v. H. Weber, J. Wellstein, W. Jacobsthal 2. Aufl. Leipzig 1907.

sichereres direktes Multiplizieren gestattet. Freilich ist die Maschine heute noch so teuer, daß nur große Rechenbüros sie sich anschaffen können; aber wenn sie erst einmal wesentlich verbilligt sein wird, wird eine *neue Phase des numerischen Rechnens* beginnen. Was die Goniometrie angeht, *werden dann die alten Tafeln von Pitiscus*, die bei ihrer Geburt sobald unmodern wurden, *erst recht zu Ehren kommen*: sie liefern direkt die trigonometrischen Werte, mit denen die Rechenmaschine unter Vermeidung des Umweges über die Logarithmen unmittelbar bequem zu rechnen gestattet. –

Es bleibt uns nun endlich noch übrig, von den

3. Anwendungen der goniometrischen Funktionen

zu reden; es kommen da für uns in Betracht:

A.) *die Trigonometrie*, die ja überhaupt den Anlaß zur Erfindung der goniometrischen Funktionen gab.

B.) *die Mechanik*, wo insbesondere die *Lehre von den kleinen Schwingungen* ein weites Anwendungsgebiet darstellt.

C.) *die Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen*, die ja bekanntlich bei den verschiedensten Fragen eine sehr wichtige Rolle spielt.

Wenden wir uns sogleich dem ersten Gegenstande zu.

lege ich Ihnen heute noch vor: Eines ist eine kleine handliche Tafel von *Schubert*, 1) die *vierstellig* ist; Sie finden da allerhand Hilfsmittel, wie zweifarbigen Druck, Wiederholung der Ueberschriften oben und unten auf jeder Seite u. dgl. angewandt, um Missverständnisse bei der Benutzung möglichst auszuschliessen. Noch viel raffinierter eingerichtet ist eine moderne amerikanische Tafel von *Huntington*, 2) wo z. B. die Blätter mit verschiedenen Vorsprüngen und Ausschnitten versehen sind, die ein sofortiges Aufschlagen der gewünschten Seite ermöglichen sollen u.s.f. Endlich lege ich hier noch einen *Rechenschieber* vor, der ja bekanntlich nichts als eine *dreistellige Logarithmentafel* in der allerbequemsten Gestalt eines mechanischen Rechenapparates darstellt; Sie alle kennen gewiss dieses Instrument, das ja heutzutage jeder Ingenieur für seine Rechnungen ständig bei sich führt.

Wir sind nun aber noch nicht am Ende der Entwicklung angelangt, sondern können ziemlich klar übersehen, wie sie weiter gehen wird. Neuerdings breitet sich nämlich die *Rechenmaschine*, von der wir auch hier sprachen, mehr und mehr aus, und sie macht die *Logarithmentafel* überflüssig, da sie ein viel rascheres und

1) Vierstellige Tafeln und Gegentafeln... (Samml. Göschen. Leipzig 1898).
2) E. V. Huntington, four place tables; abrigd. edit. (Cambridge Mass. 1907)

10-stelligen Logarithmen der natürlichen Zahlen und der trigonometrischen Linien in einer Anordnung, die seitdem typisch geworden ist; so sehen Sie z. B. schon die kleinen zur Erleichterung des Interpolieren bestimmten Differenzentäfelchen.

Wenn wir uns nun zum 19. Jahrhundert nun wenden, so bemerken wir eine weitgehende Popularisierung der Logarithmen, die einmal damit zusammenhängt, dass in den zwanziger Jahren die Logarithmen auf der Schule eingeführt worden, dann damit, dass sie immer mehr Anwendung in der physikalischen und technischen Praxis finden. Dabei mussten sie sich freilich eine beträchtliche Kürzung ihrer Stellenzahl gefallen lassen, denn sowohl das Bedürfnis der Schule als auch der Praxis drängte auf den Gebrauch nicht allzu voluminöser Tafeln hin, zumal 3 oder 4 Stellen für die bei den meisten praktischen Zwecken nötige Genauigkeit vollkommen ausreichen. Freilich hatten wir zu meiner Schulzeit noch 7-stellige Tafeln, und man verteidigte diese Stellenzahl wohl damit, dass der Schüler so einen Eindruck von der „Majestät der Zahlen" bekommen müsse. Heut ist man allgemein utilitaristischer gesinnt und benutzt durchweg drei- oder vier-, höchstens 5-stellige Tafeln. Drei beliebig herausgegriffene moderne Tafeln

Verwendung der Differenzengleichung, also durch successive Addition von $\frac{\Delta x}{x}$ berechnet und daneben auch wohl sich der Interpolation bedient. Bei Briggs tritt als wichtigstes Hilfsmittel das Quadratwurzelziehen auf; er benutzt, daß man gleichzeitig mit den Logarithmen von a und b jedesmal auch den $\log\sqrt{a.b} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ kennt; so hat wohl auch Vlacq gerechnet.

b.) Wesentliche Fortschritte wurden auch in einer zweckmäßigeren Druckanordnung der Tafeln erzielt, die es ermöglicht, mehr Material in übersichtlicher Form auf engerem Raume zu vereinigen.

c.) Vor allem wird die Korrektheit der Tafeln beträchtlich gesteigert, indem die in den älteren Tafeln, besonders in den letzten Ziffern noch vielfach enthaltenen Fehler durch sorgfältige Nachprüfung ausgemerzt werden.

Unter der großen Menge der Tafeln, die so entstanden, brauche ich wohl nur die allerberühmteste zu nennen:

4.) den Thesaurus logarithmorum completus (Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln), den der österreichische Artillerieoffizier Vega 1794 in Leipzig erscheinen ließ. Das Original ist selten geworden, es erschien jedoch 1896 in Florenz ein phototypischer Abdruck. Der Thesaurus enthält die komme darauf noch zurück. Briggs hat weiterhin noch die künstlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien berechnet und 10-stellig in Intervallen von 10" in seiner Trigonometria britannica [1] erscheinen lassen.

3.) Die Lücke in Briggs Tafel hat zuerst der Holländer Adrian Vlacq ergänzt, der in Gouda bei Leyden lebte, und Mathematiker, Buchdrucker und Buchhändler war. Er gibt eine zweite Auflage des Briggschen Werkes [2] heraus, die nun die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 auf nur noch 10 Stellen enthält. Hierin haben wir die Stammtafel aller unserer heutigen Tafeln für die Logarithmen der ganzen Zahlen zu sehen.

Was nun die weitere Entwicklung der Tafeln angeht, so kann ich hier nur noch ganz allgemein die Punkte angeben, in denen in der Folgezeit der Fortschritt gegen die genannten ersten Anfänge besteht.

a.) Zuerst greift da ein Fortschritt der Theorie wesentlich ein, indem man in den logarithmischen Reihen ein äußerst brauchbares neues Hilfsmittel zur Berechnung der Logarithmen erhielt. Davon wußten die Berechner jener ersten Tafeln noch nichts. Neper hatte, wie wir früher sahen, seine Logarithmen durch

1.) Goudae 1633
2.) Henr. Briggii Arithmetica logarithmica. Ed. sec. aucta per Adr. Vlacq. Goudae 1628.

Rechnens im Auge, so sehr, daß er gar nicht erst die Logarithmen der natürlichen Zahlen angab, sondern bald die *siebenstelligen Logarithmen der trigonometrischen Linien in Intervallen von je einer Minute*.

2.) Die wirkliche Ausgestaltung der Logarithmentafeln in der heute üblichen Form knüpft an den Engländer *Henry Briggs* (1556 – 1630) an, der mit Neper in Verbindung stand. Er erkennt den *großen Vorteil, den Logarithmen mit der Basis 10 für das praktische Rechnen haben*, indem sie sich unserer dezimalen Schreibweise besser anpassen, und so führt er denn diese Basis an Stelle der Neperschen ein; das gibt dann die „*künstlichen Logarithmen*“, die man auch wohl nach Briggs selbst nennt. Weiter aber stellt er auch die *Logarithmen der natürlichen Zahlen selbst* zusammen, nicht nur die der Winkelfunktionen. Diese Neuerungen sind enthalten in seiner *arithmetica logarithmica* 1); freilich ist er mit seinen Rechnungen nicht durchgekommen, und gibt nur die *Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000 und 90000 bis 100000* an, diese aber *auf 14 Stellen*. Merkwürdigerweise enthalten nämlich gerade die ältesten Tafeln die meisten Stellen, während man sich in der Neuzeit für die meisten Zwecke mit sehr wenigen Stellen begnügt; ich

---

1) Londini 1624.

Das Werk ist wesentlich fehlerfreier und auch kompendiöser gedruckt, als das des Rhätikus.

Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß alle diese Tafeln immer nur mit der Halbierungsformel und durch Interpolation berechnet sind, da man damals noch nicht die unendlichen Reihen für sin und cos besaß; dann bekommen wir erst den richtigen Respekt vor dem ungeheuren Fleiß und der Arbeit, die in diesen gewaltigen Werken steckt.

Unmittelbar hieran schließt die Entwicklung der zweiten Gruppe, der

B. Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln,

und es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, eine Ironie der Geschichte gewissermaßen: Ein Jahr, nachdem mit Pitiscus die Tafeln der trigonometrischen Linien eine gewisse Vollendung erreicht haben, erscheinen die ersten Logarithmen, und machen jene eigentlich überflüssig, indem fortan jeder statt der Sinus und Cosinus selbst sogleich ihre Logarithmen benutzt. Zuerst habe ich an diese schon genannte erste Logarithmentafel zu erinnern, den

1) „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" Nepers aus dem Jahre 1614. Neper hatte damit in allererster Linie die Erleichterung des trigonometrischen

fessor zu Wittenberg. Sie müssen das alles immer auch auf den Hintergrund der allgemeinen Geschichte beziehen; so sind wir hier im Zeitalter der Reformation, und wissen ja, daß damals Wittenberg und ebenso auch die freie Reichsstadt Nürnberg Hauptzentren des geistigen Lebens geworden waren. Doch allmählich verschiebt sich während der Reformationskämpfe der Schwerpunkt des politischen und geistigen Lebens immer mehr von den Städten nach den Fürstenhöfen hin; und während bisher alles in Nürnberg gedruckt wurde, erscheint das gewaltige Tafelwerk des Rhätikus unter pekuniärer Unterstützung des Kurfürsten von der Pfalz und trägt danach seinen Namen „Opus palatinum“ 1.); es erscheint erst kurz nach dem Tode des Rhätikus. Diese Tafel ist sehr viel vollständiger als die vorigen; sie enthält die Werte der trigonometrischen Linien 10-stellig von 10" zu 10"; freilich finden sich in ihr noch recht viele Fehler.

5.) Eine sehr vervollkommnete Neuausgabe dieser Tafel gibt weiterhin Pitiscus aus Grünberg in Schlesien (1561–1613), Kaplan des pfälzischen Kurfürsten, heraus; es ist der wieder mit fürstlichem Gelde gedruckte Thesaurus mathematicus 2.), der die trigonometrischen Zahlen in Intervallen von 10" und 15-stellig enthält.

1.) Heidelbergae 1596.
2.) Francofurtii 1613.

andere grundlegende mathematische Werke — Cardanus und Stifel hatten wir schon kennen gelernt und werden noch weitere finden — in den vierziger Jahren des 16. Jahrhunderts in Nürnberg gedruckt wurde. Uebrigens hatte Regiomontan selbst auch meist in Nürnberg gelebt.

3) Ich lege Ihnen weiter ein Werk von größter allgemeiner Bedeutung vor, nämlich Nic. Koppernikus, de revolutionibus orbium coelestium 1), worin das „Koppernikanische Weltsystem" entwickelt wird. Koppernikus lebte 1473 - 1543 in Thorn, dieses sein Hauptwerk erscheint aber wiederum in Nürnberg, nur zwei Jahre nach Regiomontan, dessen Tafel er noch nicht zur Hand hatte; daher mußte er sich zur Durchführung seiner Theorie selbst die kleine Sinustafel, die Sie hier finden, berechnen.

4.) Doch diese Tafeln genügten dem Bedürfnis der Astronomen noch keineswegs, und so sehen wir einen Schüler und Freund des Koppernikus bald an ein viel größer angelegtes Werk herangehen. Es ist Rhätikus, was wiederum ein künstlich latinisierter diesmal nach dem Heimatslande (Vorarlberg) gewählter Name ist; er lebte 1514 - 1576 und war Pro-

1) Norimbergae, ap. Jo. Petreium. 1543.

metrische Tafeln berechnet, in denen sich deutlich der *Uebergang von dem Resten des Sexagesimalsystems zum reinen Dezimalsystem* zeigt. Man gab damals nicht, wie heute, die trigonometrischen Linien als Brüche für den Radius 1 an, sondern berechnete sie für Kreise von sehr großem Radius, und konnte sich dann – mit der gleichen Genauigkeit – auf ihre Angabe in *ganzen Zahlen* beschränken; diese großen Zahlen selbst freilich schrieb man damals schon dezimal, aber in der *Wahl des Radius* fanden sich noch lange Anklänge an das Sexagesimalsystem. So ist noch in der einen Tafel des Regiomontan der Radius gleich 6000000 angenommen, in der zweiten aber zum ersten Male gleich einer *rein dezimalen Zahl 10000000*, womit der vollständige Anschluss an das reine Dezimalsystem gewonnen ist; durch einfaches Einfügen eines Kommas erscheint die Zahl dieser Tafeln im heutigen Sinne als Dezimalbruch. Diese Tafeln des Regiomontan sind erst lange nach seinem Tode gedruckt worden, und zwar in dem Werke seines Lehrers *G. Peurbach: Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis* [1]. Beachten Sie übrigens, dass auch dieses Werk, wie soviele

1.) Norimbergae, ap. Io. Petreium. 1541.

zu 30 Minuten fort und gibt nicht direkt den Sinus des Winkels α, sondern die zu seinem Bogen gehörige Sehne (also $2 . \sin\frac{\alpha}{2}$). Die Werte der Sehnen sind in dreistelligen Sexagesimalbrüchen angegeben, also in der Form $\frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \frac{c}{216000}$, wo a, b, c ganze Zahlen zwischen Null und 59 sind; für uns das schwierigste ist aber, daß diese a, b, c natürlich in griechischen Zahlzeichen, das sind Zusammensetzungen von griechischen Buchstaben, geschrieben sind. Weiterhin finden sich noch die Werte der Differenzen, die eine Interpolation pro Minute erlauben. Uebrigens gibt beispielsweise Tropfke in Bd. II S. 296 eine Uebersetzung eines Stückes der Tafel in moderne Schreibweise, an der Sie sich näher orientieren wollen. – Was die Berechnung dieser Tafel angeht, so hat Ptolemäus jedenfalls die oben angegebene Formel für $\sin\frac{\alpha}{2}$ (also Wurzelziehen und Interpolation verwendet.

2.) Wir gehen nun über 1000 Jahre weiter bis zu der Zeit, wo im Abendland trigonometrische Tabellen das erste Mal berechnet wurden. Da ist vor allem zu nennen Regiomontanus (1436 – 1476), der eigentlich Johannes Müller hieß, und nur diesen lateinischen Namen nach seiner Geburtsstadt Königsberg (bei Hildburghausen) annahm. Er hat verschiedene trigonoan Stelle die äußerst langwierige Entwicklung der Tafelwerke Ihnen nicht vollständig vorführen, sondern ich will nur einige wenige der markantesten Erscheinungen herausgreifen, um Ihnen einen ungefähren historischen Ueberblick zu vermitteln. Ueber die anderen, gleichfalls vielfach sehr wichtigen Werke, die das Bild ergänzen, mögen Sie sich etwa bei Tropfke oder in dem sehr ausführlichen Nachweis in Mehmkes Referat über numerisches Rechnen (Encykl. I. F.) orientieren.

An erster Stelle habe ich die Gruppe von

A. Rein trigonometrischen Tafeln

zu nennen, wie sie sich vor Erfindung der Logarithmen entwickelt haben. Man besaß solche Tafeln schon im Altertum und zwar ist uns als erste

1.) die Sehnentafel des Ptolemäus überliefert, die er für astronomische Zwecke ums Jahr 150 p. Chr. zusammengestellt hat. Sie befindet sich in seinem Werke „Megale syntaxis", in dem er auch das nach ihm genannte Weltsystem entwickelt, und das ich Ihnen im Neudruck [1] hier vorlege. Auf dem Umwege über die Araber ist uns dieses Werk unter dem vielgebrauchten Titel „Almagest" überkommen, der eine mit dem arabischen Artikel „al" versehene Entstellung des griechischen Titels sein mag. Die Tafel schreitet von 30'

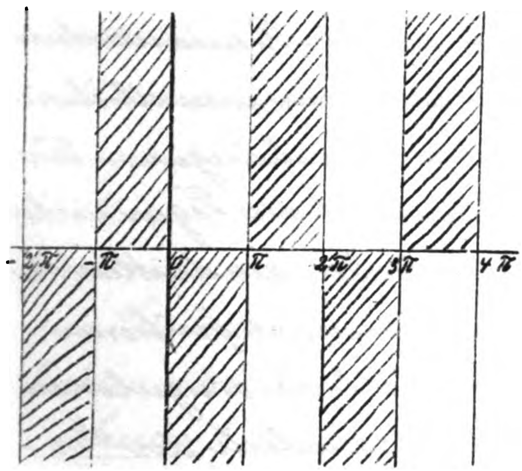
1) ed. Heiberg. Leipzig 1898/1903

Schaaren von je unendlichvielen Dreiecken im Unendliche, entsprechend dem Umstande, daß auf der Riemannschen Fläche bei ∞ zwei getrennte Schaaren von unendlichvielen Blättern untereinander zusammenhängen. – Für $z = \sin w$ gilt ganz Analoges, nur ist die Figur in der w-Ebene um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben zu denken. In den Figuren bestätigen sich auch unsere früheren Angaben betr. die Natur des wesentlich singulären Punktes bei $w = \infty$, wie wir sie gelegentlich der Erwähnung des Picardschen Satzes machten (S. 355).

2. Trigonometrische Tafelwerke.

Ich beende damit den kurzen Überblick über die Theorie der goniometrischen Funktionen und komme nun auf das zu sprechen, was für die Praxis die Hauptsache ist, nämlich auf die trigonometrischen Tafeln; ich will dabei auch gleichzeitig über die Logarithmentafeln sprechen, die ich bis hierhin zurückgestellt habe, da die Tabulierung der Logarithmen von Anfang an bis heute mit der der trigonometrischen Zahlen Hand in Hand geht. Wie die Logarithmentafeln in ihrer heutigen Form zu Stande gekommen sind, das ist eine auch für den Schulmathematiker gewiß außerordentlich wichtige und interessante Frage. Ich kann nun natürlich an die-

<u>w-Ebene: ($z = \cos w$)</u>



punkte <u>erster</u>, über $z = \infty$ aber <u>zwei unendlich hoher Ordnung</u>. Um den Verlauf der Blätter im Einzelnen besser zu verfolgen, betrachten wir wieder <u>die Einteilung der w-Ebene in Gebiete, die der (schraffierten) oberen und der (unschraffierten) unteren z-Halbebene entsprechen</u>. Für $z = \cos w$ entsteht sie durch die reelle Achse und die durch die Punkte $w = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$ gelegten Parallelen zur imaginären Achse, wobei – wie aus der Figur ersichtlich – die entstehenden Dreiecksgebiete, die sämtlich ins Unendliche reichen, abwechselnd zu schraffieren und freizulassen sind. An den Punkten $w = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots$ (die $z = +1$ entsprechen) und den Punkten $w = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ (die $z = -1$ entsprechen) stoßen immer 4 Dreiecke zusammen, entsprechend den 4 Halbblättern der Riemannschen Fläche, die an jedem der entsprechenden über den Stellen $z = \pm 1$ liegenden Verzweigungspunkte zusammenhängen. Dem Werte $z = \infty$ nähert sich $\cos w$ jedesmal beliebig, wenn man innerhalb eines Dreiecks nach oben oder unten ins Unendliche geht; und in der Tat reichen 2 getrennte und ganz analog folgt

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi.$$

Nun ergibt sich sofort aus dem Taylorschen Satze

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots;$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots.$$

Man sieht leicht, daß diese Reihen für jedes endliche, auch komplexe x konvergieren, und daher $\sin x$ und $\cos x$ im ganzen komplexen Gebiete als eindeutige, ganze transzendente Funktionen definiert sind.

5.) Vergleichen wir diese Reihen mit der Reihe von e^{φ}, so ergibt sich unmittelbar, daß die Fundamentalfunktion

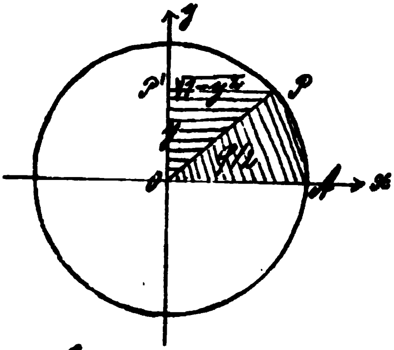
$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

ist; dieser Schluß wird unzweideutig erst möglich durch die Erkenntnis, daß $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ebenso wie e^{φ} eindeutige ganze Funktionen sind.

6.) Wir haben nun noch den Verlauf der komplexen Funktionen $\sin w$, $\cos w$ zu beschreiben. Dazu bemerke ich zuerst, daß die inversen Funktionen $w = \sin^{-1} z$ und $w = \cos^{-1} z$ je eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche mit den Verzweigungsstellen $-1, +1, \infty$ liefern, und zwar liegen über $z = \pm 1$ je unendlichviele Verzweigungs-:

z-Ebene:

tor $\frac{\varphi}{2}$ (AOP) des Einheitskreises, mit dem horizontal schraffierten Dreieck OP'P zusammen wird von den Parallelen $y = 0$, y zur Abscissenachse und der Kurve $x = \sqrt{1-y^2}$ begrenzt und hat daher den Inhalt $\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy$; da jenes Dreieck den Inhalt $\frac{1}{2}\,OP'\cdot P'P = \frac{1}{2}\,y\sqrt{1-y^2}$ hat, ist also:



$$\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\varphi .$$

Hieraus folgt durch einfache Umformung:

$$\varphi = \sin^{-1} y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Nun kann man, ganz wie beim Logarithmus, indem man den Integranden nach dem binomischen Satze entwickelt und dann nach Mercators Gedanken gliedweise integriert, die Potenzreihe für $\sin^{-1} y$ ableiten, und daraus durch die Methode der Reihenumkehr die Sinusreihe selbst erhalten; so ist auch – ich sprach ja schon davon – Newton selbst vorgegangen.

4.) Ich möchte hier einmal lieber den kürzeren Weg einschlagen, den Taylors große Entdeckung eröffnet hat. Da schließt man zunächst aus der genannten Integralformel für den Differentialquotienten des Sinus selbst:

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{1-y^2} = \cos\varphi ,$$

und eine analoge Formel für $\cos(\varphi+\psi)$. Der Grund dass diese Formeln relativ komplizierter aussehen, als bei der Exponentialfunktion, liegt natürlich nur darin, dass wir hier zunächst nicht die wahre Elementarfunktion verwenden; für diese, unser $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ergibt sich genau die für e^{φ} geltende höchst einfache Formel

$$f(\varphi+\psi) = f(\varphi)\cdot f(\psi).$$

2.) Von hier aus gelangt man zu den Ausdrücken der *Funktionen der Vielfachen und Teile eines Winkels*, von denen ich nur die beiden Formeln

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

hervorhebe, die bei der Berechnung der ersten trigonometrischen Tafeln von großer Bedeutung gewesen sind. Die eleganteste Zusammenfassung der hierhin gehörigen Beziehungen ist gegeben in der *„Moivreschen Formel"*

$$f(n\cdot\varphi) = (f(\varphi))^{n}, \quad \text{wo } f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Moivre, der ein Franzose war und in London in der Umgebung Newtons lebte, hat diese Formel *1730* in seinem Buche „*Miscellanea analytica*" publiziert.

3.) Von unserer ursprünglichen Definition von $y = \sin\varphi$ aus kann man natürlich leicht eine *Integraldarstellung der Inversen* $\varphi = \sin^{-1} y$ ableiten. Der Sek-

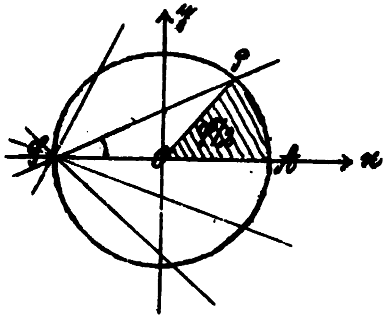
Die Einführung von λ kommt also schließlich einfach auf die Bestimmung einer linear gebrochenen Funktion von $f(\varphi)$ heraus, die längs der reellen Kreisperipherie reell ist; dadurch werden die Formeln zwar reell, aber nicht so einfach, wie bei direkter Verwendung von $f(\varphi)$.

Ob man freilich den Vorteil der Realität gegen diesen Nachteil eintauschen will, das hängt davon ab, wie weit der einzelne mit komplexen Größen umzugehen versteht. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur, daß die Physiker jetzt schon lange zum Gebrauch komplexer Größen übergegangen sind, besonders z. B. in der Optik, sowie sie mit Schwingungsgleichungen zu tun haben. Aber auch die Techniker, vor allem die Elektrotechniker mit ihren Vectordiagrammen beginnen sich neuerdings mit Vorteil der komplexen Größen zu bedienen. Man darf also wohl sagen, daß sich die Benutzung komplexer Größen in weiteren Kreisen endlich einzubürgern beginnt, wenn auch freilich zur Zeit noch die große Masse an der Beschränkung auf das Reelle festhält.

Wenn wir nunmehr, meine Herren, kurz den weiteren Aufbau der Theorie der goniometrischen Funktionen überblicken wollen, so haben wir zuerst zu nennen:

1.) das Additionstheorem $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi$

inhalts auffassen, werden wir zu einer anderen Fundamentalfunktion kommen – auch auf reellem Wege. –



Wir betrachten dazu beim Kreise das Büschel durch den Punkt S $(-1|0)$

$$y = \lambda(x+1),$$

wo λ der Parameter; wir hatten schon bei anderer Gelegenheit (S. 112) für die Koordinaten des Schnittes P des zu λ gehörigen Strahles mit dem Kreise ausgerechnet:

$$x = \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \qquad y = \sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

so daß

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

tatsächlich eine geeignete reelle Fundamentalfunktion ist. Da übrigens $\sphericalangle PSO = \frac{1}{2} POA$, und $POA = \varphi$ ist, folgt sofort, daß $\lambda = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ ist; diese eindeutige Darstellung von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ wird bei trigonometrischen Rechnungen vielfach gebraucht. Der Zusammenhang von λ mit der früheren Fundamentalfunktion $f(\varphi)$ folgt aus der letzten Formel sofort in der Gestalt:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{1}{i}\,\frac{f-f^{-1}}{f+f^{-1}+2} = \frac{1}{i}\,\frac{f^2-1}{f^2+1+2f} = \frac{1}{i}\,\frac{f(\varphi)+1}{f(\varphi)-1}$$

oder umgekehrt:

$$f(\varphi) = x+iy = \frac{1-\lambda^2+2i\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

$\eta = f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\quad \xi = \frac{1}{f(\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi$.

3.) Aus den letzten Gleichungen ergibt sich sofort:

$$\cos\varphi = \frac{\xi+\eta}{2} = \frac{f(\varphi)+(f(\varphi))^{-1}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-\xi+\eta}{2i} = \frac{f(\varphi)-(f(\varphi))^{-1}}{2i},$$

wodurch wir völlige Analogie mit den früheren Beziehungen zwischen $\mathfrak{Cos}\,\Phi$, $\mathfrak{Sin}\,\Phi$, e^{Φ} erreicht haben. Kehrt man so von vornherein die Analogie der Kreis- und Hyperbelfunktionen hervor, so verliert die große Euler'sche Entdeckung, daß $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ ist, das Ueberraschende, das sie sonst an sich hat.

Ist nun nicht eine ähnliche Reduktion von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auf eine Fundamentalfunktion auch möglich, wenn man im reellen Gebiet bleibt? Man gelangt in der Tat dazu, wenn man unsere Figuren mit den Augen der projektiven Geometrie betrachtet. Wir können nämlich bei der Hyperbel die Koordinate η, die uns die Fundamentalfunktion lieferte, definieren als Parameter in einem Büschel von Parallelen $\eta = \text{Const.}$, das vom projektiven Standpunkte aus in seiner Beziehung zur Hyperbel betrachtet nichts ist, als ein Strahlenbüschel mit einem (hier speziell einem der unendlich fernen) Hyperbelpunkte als Scheitel. Indem wir nun beim Kreise oder der Hyperbel allgemein den Parameter irgend eines solchen Büschels als Funktion des Flächen-durch eine einzige Funktion e^{Φ} rational darstellen konnten, brauchen wir jetzt deren 2, die durch eine algebraische Relation (die Hyperbelgleichung) verbunden sind. Es wird daher jetzt nahe liegen, umgekehrt die goniometrischen Funktionen ganz entsprechend den ursprünglichen Entwicklungen für die Hyperbel zu behandeln; das geht in der Tat ganz leicht, wenn man nur den Durchgang durchs Komplexe nicht scheut, und führt zur Aufstellung einer einzigen fundamentalen Funktion, durch die sich $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ähnlich rational ausdrücken, wie $\mathfrak{Cof}\,\Phi$ und $\mathfrak{Sin}\,\Phi$ durch e^{Φ}, und die daher in der Theorie der goniometrischen Funktionen eigentlich die zentrale Rolle zu spielen berufen ist:

1.) Wir führen dazu zunächst in der Kreisgleichung $x^2+y^2=1$ (wo $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$) die neuen Koordinaten

$$x+iy=\xi \qquad x-iy=\eta$$

ein; dann geht sie über in

$$\xi\cdot\eta=1.$$

2.) Die gewünschte zentrale Funktion ist nun, genau wie oben unter 2) bei der Hyperbel, die zweite Koordinate; bezeichnen wir sie mit $f(\varphi)$, so ist wegen der Transformationsgleichungen:

Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ zu verkleinern, damit die Halbachse der Hyperbel statt $\sqrt{2}$ gleich 1 wird, genau wie vorhin 1 der Kreisradius war. Dann hat nunmehr in völliger Übereinstimmung mit dem vorigen der fragliche Sektor den Inhalt $\frac{1}{2}\Phi$, und wenn wir die neuen Koordinaten einfach wieder x, y nennen, werden sie gleich folgende Funktionen von Φ:

$$x = \frac{e^{\Phi}+e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \frac{e^{\Phi}-e^{-\Phi}}{2},$$

die der Relation (Hyperbelgleichung) genügen:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

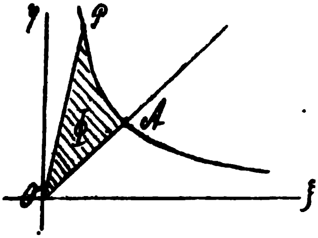
Diese Funktionen nennt man hyperbolischen Cosinus und Sinus und schreibt sie

$$x = \operatorname{Cof} \Phi = \frac{e^{\Phi}+e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \operatorname{Sin} \Phi = \frac{e^{\Phi}-e^{-\Phi}}{2}.$$

Behandelt man also – das ist das Resultat – Kreis und gleichseitige Hyperbel von der Halbachse 1 in wörtlich derselben Weise, so wird man das eine Mal auf die gewöhnlichen goniometrischen, das andere Mal auf die hyperbolischen Funktionen geführt, die einander völlig entsprechen.

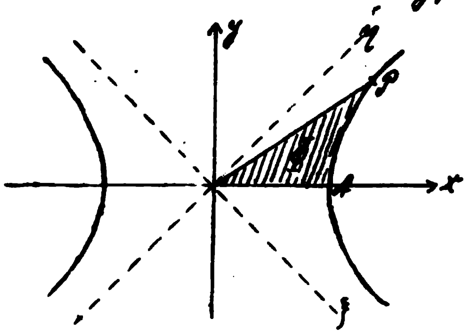
Es ist Ihnen bekannt, daß man sich dieser Funktionen Cof und Sin in vielen Fällen mit Vorteil bedient. Trotzdem aber haben wir hier, was die Behandlung der Hyperbel angeht, im Grunde einen Rückschritt gemacht: während wir zuerst die Koordinaten ξ, η

einem beweglichen Hyperbelpunkte definiert werden kann – genau wie vorhin beim Kreise. Den im Vorzeichen noch bestehenden Unterschied, (von O aus gesehen läuft der Bogen AP vorhin nach links, jetzt nach rechts) beseitigen wir, indem wir die Hyperbel an OA spiegeln, d.h. ξ und η vertauschen; dann erhalten wir also als Koordinaten von P:



$$\xi = e^{-\Phi} \qquad \eta = e^{\Phi}.$$

3.) Endlich führen wir statt der Asymptoten die Hauptachsen der Hyperbel als Koordinatenachsen ein, indem wir die Figur um 45° drehen. Nennen wir die neuen Koordinaten X, Y, so sind die Gleichungen dieser Transformation



$$X = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \qquad Y = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}};$$

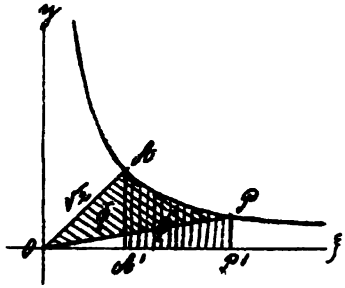
dadurch geht die Hyperbelgleichung über in

$$X^2 - Y^2 = 2,$$

und der Sektor Φ erhält genau die Lage, wie vorhin beim Kreise. Die neuen Koordinaten von P sind folgende Funktionen von Φ:

$$X = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}} \qquad Y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4.) Es bleibt nur noch übrig, die ganze Figur im



$$\xi \cdot \eta = 1\,;$$

die Halbachse dieser Hyperbel ist $OA = \sqrt{2}$, während der Kreis den Radius 1 hatte. Wir betrachten nun den Inhalt des Streifens zwischen der festen Ordinate AA' ($\xi = 1$) und der beweglichen PP'; heiße er Φ, so setzen wir $\Phi = \log \xi$ und haben daher als Koordinaten von P:

$$\xi = e^{\Phi} \qquad \eta = e^{-\Phi}.$$

Sie bemerken eine gewisse Analogie mit dem Obigen, die vorläufig allerdings durch eine zweifache Unstimmigkeit gestört wird: Einmal ist Φ jetzt kein Sektor, wie vorhin, dann aber drücken sich jetzt beide Koordinaten rational durch die eine Funktion e^{Φ} aus, während wir beim Kreise 2 Funktionen sin, cos einführen mußten. Wir werden nun aber sehen, daß diese Abweichungen leicht zu beseitigen sind.

3.) Zunächst bemerken wir, daß das Dreieck $OP'P$ den von der speziellen Lage von P unabhängigen Inhalt $\frac{1}{2} \cdot OP' \cdot P'P = \frac{1}{2} \xi \cdot \eta = \frac{1}{2}$ hat; insbesondere ist es also gleich dem Dreiecke $OA'A$, und wenn wir dieses zu Φ hinzunehmen, jenes aber abziehen, so erkennen wir, daß Φ als Inhalt eines Hyperbelsektors OAP zwischen den Radienvektoren nach dem Scheitel A und nach

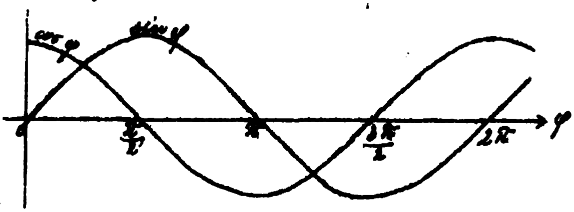
$\varphi = \cos^{-1} x \,, \quad \varphi = \sin^{-1} y .$

3.) Die weiteren goniometrischen Funktionen

$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\,, \quad \operatorname{cotang} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\,,$

in der älteren Trigonometrie auch sec und cosec, werden als einfache Verbindungen jener beiden Grundfunktionen definiert. Ihre Einführung geschieht nur mit Rücksicht auf die Kürze der für das praktische Rechnen zu verwendenden Formeln; theoretische Bedeutung haben sie für uns nicht.

4.) Verfolgen wir die Koordinaten von P mit wachsendem φ, so können wir uns qualitativ sofort die cos- und sin-Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.

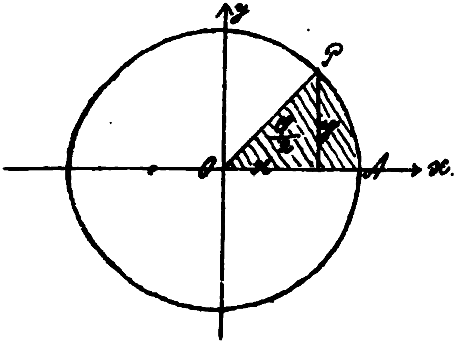


Wir erhalten die bekannten Wellenlinien, die eine gewisse Periode 2π haben; dabei ist die Zahl π definiert als Inhalt des ganzen Einheitskreises (nicht, wie sonst, als Länge des Halbkreises).

Mit diesen Definitionen wollen wir nun noch einmal genau unsere Einführung des Logarithmus bezw. der Exponentialfunktion vergleichen. Da legten wir zu Grunde

1.) eine gleichseitige Hyperbel, bezogen auf das Koordinatensystem ξ, η ihrer Asymptoten:

1.) von dem Einheitskreise



$$x^2+y^2=1$$

und betrachte den Sektor, der von den Radienvektoren nach den Punkten $A\,(x=1\,|\,y=0)$ und $P(x|y)$ gebildet wird. Um mit den üblichen Bezeichnungen in Übereinstimmung zu kommen, bezeichne ich seinen Flächeninhalt mit $\frac{\varphi}{2}$ (denn dann ist der Bogen $AP=\varphi$).

2.) Unter den goniometrischen Funktionen Cosinus und Sinus von φ verstehen wir nun die Längen der Koordinaten x und y des Grenzpunktes P unseres Sektors $\frac{\varphi}{2}$:

$$x=\cos\varphi \qquad y=\sin\varphi .$$

Der Ursprung dieser Bezeichnung wird dabei freilich nicht klar, doch man kennt ihn überhaupt nicht recht; wahrscheinlich ist das Wort sinus durch eine mißverständliche Uebersetzung eines arabischen Wortes ins Lateinische entstanden.[1] Da wir nicht vom Bogenmaß ausgingen, können wir die inversen Funktionen – d. h. den doppelten Sektor als Funktion der Koordinaten – nicht gut, wie bei uns üblich, als „Arcus" bezeichnen; sehr zweckmäßig ist aber die in England übliche Schreibweise:

1.) Vgl. Tropfke, Bd II, pag. 212

I. von den goniometrischen Funktionen zu handeln haben. Bemerken wir vorweg, daß wir diesen Namen statt desjenigen „trigonometrische Funktionen" vorziehen, weil die Dreieckslehre nur eine spezielle Anwendung dieser in der gesamten Mathematik höchst wichtigen Funktionen ist; ihre inversen Funktionen, die genau dem Logarithmus entsprechen, (während sie selbst der Exponentialfunktion analog sind) werden wir zyklometrische Funktionen nennen.

Die Behandlung der

1. Theorie der goniometrischen Funktionen

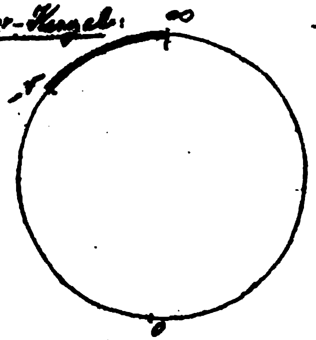
schließen wir an die Frage an, wie man sie etwa auf der Schule am naturgemäßesten wird einführen können? Ich denke, daß man auch da unser allgemeines Prinzip, von der Flächenquadratur auszugehen, am besten anwenden wird; das übliche Verfahren, das mit der Bogenmessung beginnt, scheint mir nicht so unmittelbar anschaulich zu sein, und hat vor allem nicht den Vorzug, daß man höhere und niedere Gebiete gleich einfach und einheitlich damit beherrschen kann. Erlauben Sie mir, mich bald wieder der analytischen Geometrie zu bedienen; ich gehe dann von komplizierte und wunderbare Grenzübergang von der vieldeutigen Potenz zur eindeutigen Exponentialfunktion erst völlig geklärt.

Als allgemeine Moral aller dieser letzten Betrachtungen können wir vielleicht noch aussprechen, *daß ein vollständiges inneres Verständnis solcher Probleme nur beim Uebergange ins komplexe Gebiet möglich ist*. Wäre das nicht Grund genug, auch auf der Schule komplexe Funktionentheorie zu treiben? Max Simon z. B. hat in der Tat ähnliche Forderungen befürwortet. Ich glaube aber nicht, daß man den Durchschnitt der Schüler selbst in Prima soweit führen kann, und meine schon deshalb, *man sollte die hier einmündende Methodik der algebraischen Analysis im Unterricht überhaupt zu Gunsten des oben entwickelten einfachen und naturgemäßen Weges aufgeben*. Freilich wünsche ich um so mehr, *daß der Lehrer alle in Betracht kommenden funktionentheoretischen Zusammenhänge völlig beherrscht, denn er muß hinreichend über dem Stoff stehen, den er vorzutragen hat, und muß die Klippen und Untiefen genau kennen, an denen er seine Schüler vorbeiführt*.

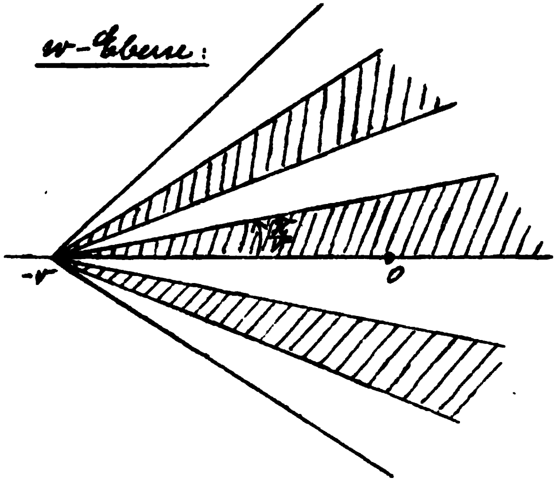
Nach diesen ausführlichen Betrachtungen werden wir uns vielfach kürzer fassen können, wenn wir nunmehr

Ebene übergehen? Läßt man z. B. ν durch lauter gebrochene Werte mit dem Nenner n gegen ∞ konvergieren, so hat jedes $f_\nu(w)$ eine n-blättrige Riemannsche Fläche. Wir wollen, um diesen Grenzprozeß zu verfolgen, für einen Moment die w-Kugel betrachten; sie ist für jedes der $f_\nu(w)$ mit n Blättern überdeckt, die an den Verzweigungspunkten

w-Kugel:



$-\nu$ und ∞ zusammenhängen; der Verzweigungsschnitt sei, wie in der Figur angedeutet, längs des kleineren Meridianstückes zwischen ihnen gelegt. Geht nun ν gegen ∞, so rücken die Verzweigungspunkte zusammen und der Verzweigungsschnitt verschwindet; damit wird die Brücke, über die die n Blätter zusammenhängen, abgebrochen, und es kommen n getrennt liegende Blätter und entsprechend n verschiedene eindeutige Funktionen heraus, von denen nur die eine unser e^w ist. – Lassen wir nun ν alle reellen Werte durchlaufen, so treten im allgemeinen unendlichblättrige Flächen auf, deren Zusammenhang in der Grenze gelöst wird; die Werte auf je einem Blatte dieser Flächen konvergieren gegen das eindeutige e^w, das auf der schlichten Kugel ausgebreitet ist, während die Wertfolgen auf den andern Blättern im allgemeinen gar keine Grenzwerte haben. Damit ist der gewiß recht w-Ebene:



Punkte $w = -\nu$ als Scheitel und der Winkelöffnung von je $\frac{\pi}{\nu}$; ist ν keine ganze Zahl, so kann die Folge dieser Sektoren die w-Ebene endlich- oder gar unendlich oft überdecken, entsprechend der dann auftretenden Vieldeutigkeit von f_ν. Wird nun ν unendlich, so rückt der Scheitelpunkt $-\nu$ der Sektorenteilung unbegrenzt nach links, und es ist durchaus anschaulich, *wie die rechts von $-\nu$ gelegenen Sektoren in die der Grenzfunktion e^w entsprechenden Parallelstreifen der w-Ebene übergehen*, wodurch jene Limesdefinition von e^w geometrisch erläutert ist; man kann durch eine leichte Rechnung bestätigen, daß die Breite der Sektoren am Punkte $w = 0$ in die Streifenbreite π der Parallelteilung übergeht.

Nun stellt sich aber sofort ein Skrupel ein: Lassen wir ν ins Unendliche laufen, so passiert es nicht nur ganzzahlige, sondern auch rationale und irrationale Werte, für die *f_ν mehrdeutig* wird und denen *mehrblättrige Flächen* entsprechen; *wie können diese in die zur eindeutigen Funktion e^w gehörige schlichte* läßt, höchstens noch einen Wert nicht annehmen darf. e^w ist ein Beispiel einer Funktion, die wirklich außer ∞ noch einen Wert, nämlich $z = 0$ ausläßt; denn in einem jeden Parallelstreifen unserer Teilung nähert sich zwar e^w bei den angegebenen Grenzübergängen jenen beiden Werten, wird ihnen aber an keiner endlichen Stelle gleich. Eine Funktion, die nur _einen_ Wert ($z = \infty$) ausläßt, ist ein w.

Zum Schlusse dieser Auseinandersetzungen will ich noch einen schon wiederholt berührten Punkt unter Verwendung dieser geometrischen Hilfsmittel erörtern, nämlich _den Grenzübergang von der Potenz zur Exponentialfunktion, der an die Formel knüpfte:_

$$\underline{e^w = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot w}}$$

oder, wenn wir $n \cdot w = \nu$ setzen:

$$\underline{e^w = \lim_{\nu=\infty} \left(1+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu}}$$

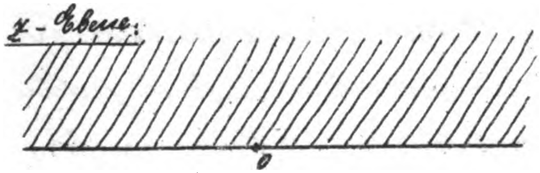
Betrachten wir dazu die Funktion vor dem Grenzübergange:

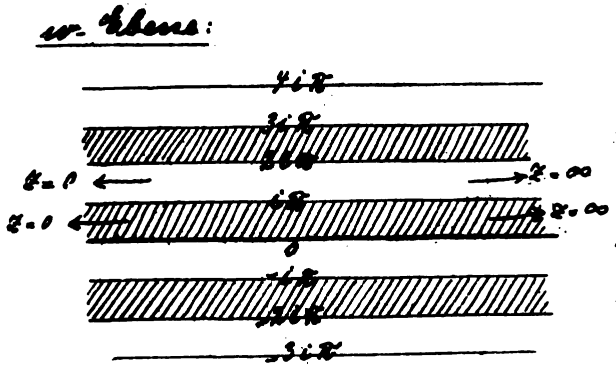
$$z_\nu(w) = \left(1+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu},$$

deren funktionentheoretisches Verhalten als Potenz uns wohl bekannt ist. Sie hat zu „_merkwürdigen Punkten_" die Punkte $w = -\nu$ und $w = \infty$, an denen die Basis 0 bzw. ∞ wird, und bildet die z_ν-Halbebenen konform ab auf Sektoren der w-Ebene mit dem halb der reellen Achse ist schraffiert) und stellen demgemäß abwechselnd konforme Abbilder der oberen und unteren Halbebene dar, während die Grenzparallelen den Teilen der reellen z-Achse entsprechen. Was die Zuordnung im einzelnen angeht, so bemerke ich hier nur, daß z allemal nach 0 geht, wenn w innerhalb eines Streifens nach links hin ins Unendliche konvergiert, während es nach ∞ geht, wenn w nach rechts hin ins Unendliche rückt; bei $w = \infty$ ist eine wesentlich singuläre Stelle der Umkehrfunktion e^w.

Ich möchte hier nicht unterlassen, auf die Beziehung zum Picardschen Satze hinzuweisen, der ja einer der interessantesten Sätze in der neueren Funktionentheorie ist. Es sei $z(w)$ eine ganze transzendente Funktion, d. h. eine Funktion, die nur eine in $w = \infty$ gelegene wesentlich singuläre Stelle besitzt (wie z. B. e^w). Die Frage ist, ob und wie viele Werte z es geben kann, die an keiner endlichen Stelle w angenommen werden, sondern denen sich $z(w)$ nur nähert, wenn w in geeigneter Weise nach ∞ läuft. Der Picardsche Satz sagt nun aus, daß eine Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle höchstens zwei verschiedene Werte nicht annehmen kann, daß also eine ganze Transzendente außer $z = \infty$, das sie ja notwendig aus-probleme vor uns haben.

Wir wollen uns nun die Natur des Funktionsverhältnisses $w = \log z$ durch die Betrachtung der konformen Abbildung der z-Ebene (bezw. Riemannschen Fläche) auf die w-Ebene noch klarer machen; um nicht zu weit ausholen zu müssen, wollen wir hier auf die an sich natürlich vorzuziehende Betrachtung der entsprechenden Kugeln verzichten. Wir zerlegen, wie früher, die z-Ebene durch die Achse der reellen Zahlen in eine schraffierte (obere) und eine nichtschraffierte Halbebene, dann muß eine jede in der w-Ebene unendlich viele Bilder haben, da $\log z$ unendlichvieldeutig ist, und alle diese Bilder müssen sich schlicht nebeneinanderlegen, da die Umkehrfunktion $z = e^w$ eindeutig ist. Im einzelnen entsteht so eine Einteilung der w-Ebene in Parallelstreifen von der Breite π, die durch Parallelen zur reellen Achse hervorgerufen wird; diese Streifen sind abwechselnd zu schraffieren und frei zu lassen (der erste ober-

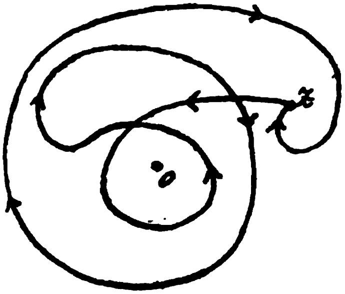




tionale Potenz $z^{\frac{m}{n}}$, so wird sie wegen

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z}$$

eine eindeutige Funktion von $w = \log z$, sie wird – wie man sagt – durch den Logarithmus uniformisiert. Um dies zu vorstellen, denken wir uns über der z-Ebene außer der Riemannschen Fläche des Logarithmus auch die von $z^{\frac{m}{n}}$ ausgebreitet: es wird eine n-blättrige Fläche, deren Verzweigungsstellen gleichfalls bei $z = 0$ und $z = \infty$ liegen, wo jeweils alle n Blätter in Zyklen zusammenhängen. Fassen wir nun irgend einen geschlossenen Weg in



der z-Ebene auf, auf dem der Logarithmus wieder zu seinem Ausgangswert zurückkehrt, der also auch auf dessen unendlichblättriger Fläche geschlossen ist, so sieht man leicht, daß er jedenfalls auch geschlossen bleiben muß, wenn man ihn auf die n-blättrige Fläche von $z^{\frac{m}{n}}$ überträgt; aus dieser geometrischen Betrachtung entnehmen wir sofort, daß $z^{\frac{m}{n}}$ allemal dann zum Ausgangswert zurückkehrt, wenn $\log z$ es tut, und daß es daher durch den Logarithmus uniformisiert wird. Ich mache diese kurzen Andeutungen um so lieber, als wir hier den einfachsten Fall der in der modernen Funktionentheorie eine so große Rolle spielenden Uniformisierungswirklich verstehen können: sie liefert lauter Werte der einen unserer unendlich vielen Funktionen, nämlich der Funktion

$$[b^w] = e^{w[\log w]}$$

Hiergegen gehören die gleichfalls überall dicht liegenden negativen reellen Werte von $b^{\frac{m}{n}}$ bei geraden n ganz verschiedenen unserer unendlich vielen Funktionen an, und sie können sich daher unmöglich zu einer stetigen analytischen Kurve zusammen schließen.

Ich möchte nun noch einige tiefer gehende Bemerkungen über die funktionentheoretische Natur des Logarithmus anfügen. Da $w = \log z$ bei jedem Umlauf um $z = 0$ einen additiven Zuwachs von $2\pi i$ erhält, hat die zugehörige unendlichvielblättrige Riemannsche Fläche daselbst einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung, derart, daß man bei jedem Umlauf aus einem Blatte in das nächste kommt; man kann durch Uebergang zur Kugel leicht erkennen, daß $z = \infty$ ein zweiter Verzweigungspunkt genau derselben Art der Fläche ist – andere gibt es nicht. Wir können uns nun anschaulich klar machen, was man die uniformisierende Kraft des Logarithmus nennt, und wovon wir schon gelegentlich der Lösung gewisser algebraischer Gleichungen sprachen (S. 218). Hat man nämlich, um die Ideen zu fixieren, eine radizierens ergeben, gar nicht einer einheitlichen Funktion angehören, sondern unendlich vielen verschiedenen Funktionen von w, deren jede durchaus eindeutig ist.

Die Werte dieser Funktionen stehen freilich in mancherlei Beziehung zu einander. Insbesondere sind sie alle gleich, sowie w eine ganze Zahl ist, und es gibt nur endlich viele, und zwar n verschiedene unter ihnen, wenn w eine rationale Zahl der Form $\frac{m}{n}$ ist, wo m und n teilerfremd sind; diese Werte sind $e^{\frac{m}{n}[\log b]} \cdot e^{\frac{2ki\pi m}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots n-1$, also, wie es ja auch sein muß, die n Werte von $\sqrt[n]{b^m}$.

7.) Nun erst können wir recht einsehen, wie unzweckmäßig die herkömmliche Systematik ist, die vom Potenzieren und Radizieren aus zur eindeutigen Exponentialfunktion aufsteigen will; sie begibt sich geradezu in ein Labyrinth, in dem sie sich mit ihren sog. „elementaren" Hilfsmitteln unmöglich zurecht finden kann, zumal sie immer an reelle Größen sich gebunden hält. Sie werden das deutlich erkennen, wenn Sie auf Grund der jetzt gewonnenen allgemeinen Einsicht einmal die Verhältnisse bei negativem b durchdenken. Hier will ich nur noch darauf hinweisen, daß wir jetzt die Zweckmäßigkeit der früher willkürlich erscheinenden Definition der Hauptwerte ($b > 0$ und $b^{\frac{m}{n}} > 0$; vgl. S. 321)

5.) Es sei $f(1) = e$. Dann folgt aus (3), daß für jeden rationalen Wert $w = \frac{m}{n}$ $f(w)$ einem der n in gewöhnlicher Weise definierten Werte $\sqrt[n]{e^m}$ gleich ist:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}.$$

Es ist nun üblich – und diesem Gebrauche wollen wir uns anschließen – mit $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ schlechtweg stets diesen einen Wert $f(w)$ zu bezeichnen, so daß dann e^w eine wohl bestimmte eindeutige Funktion, eben die unter 9) definierte, darstellt.

6.) Was werden wir nun im allgemeinsten Sinne unter der Potenz b^w mit beliebiger Basis b für eine Funktion zu verstehen haben? Die Festsetzungen werden natürlich so zu treffen sein, daß die formalen Potenzregeln erhalten bleiben. Setzen wir also, um b^w auf das soeben definierte e^w zurückzuführen, b gleich $e^{\log b}$, wo $\log b$ die unendlich vielen Werte

$$\log b = [\log b] + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

hat, so wird notwendig:

$$b^w = (e^{\log b})^w = e^{w \cdot \log b} = e^{w[\log b]} \cdot e^{2ki\pi w} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

und das stellt für die verschiedenen Werte von k unendlich viele durchaus unzusammenhängende Funktionen dar. Wir haben so das merkwürdige Ergebnis, daß die Werte des allgemeinen Exponentialausdruckes b^w, so wie sie sich durch die Prozesse des Potenzierens und Rawill, und je nach der Entscheidung darüber erhält der Logarithmus den imaginären Bestandteil $+i\pi$ oder $-i\pi$. Aus dem Hauptwert ergibt sich der allgemeine Wert des Logarithmus durch Addition eines beliebigen Vielfachen von $2i\pi$:

$$(2) \qquad \log z = [\log z] + 2ki\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

3.) Aus der Integraldefinition von $\log z$ folgt, daß eine Umkehrfunktion $z = f(w)$ der Differentialgleichung

$$\frac{df}{dw} = f$$

genügt, und aus dieser läßt sich die Potenzreihenentwicklung von f sofort herstellen:

$$z = f(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots$$

Da diese Reihe für jedes endliche w konvergiert, kann man schließen, daß diese Umkehrfunktion eine eindeutige Funktion ist, die nur für $w = \infty$ singulär wird, also eine „ganze" transzendente Funktion.

4.) Genau wie im Reellen kann man aus der Integraldefinition das Additionstheorem des Logarithmus herleiten, aus dem für die Inverse die Gleichung

$$(3) \qquad f(w_1) \cdot f(w_2) = f(w_1 + w_2)$$

folgt. Ebenso ergibt sich aus (2)

$$(4) \qquad f(w + 2k\pi i) = f(w), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

d.h. $f(w)$ ist eine einfach periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$.

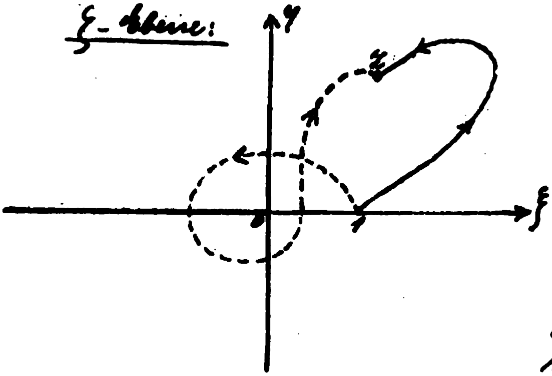
Wir müssen uns nun endlich noch darüber orientieren, wie unsere Theorie betrachtet vom

4. Standpunkt der modernen Funktionentheorie

erscheint, wobei wir dann endlich auch volle Aufklärung über sämtliche früher berührte Schwierigkeiten erhalten werden. Wir führen fortan statt y und x komplexe Variable $w = u + iv$ und $z = x + iy$ ein:

1.) Der Logarithmus wird definiert durch das Integral

$$(1) \qquad w = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi},$$



wobei der Integrationsweg irgend eine von $\xi = 1$ nach $\xi = z$ führende Kurve der komplexen ξ-Ebene ist.

2.) Je nachdem der Integrationsweg den Punkt $\xi = 0$ keinmal, einmal, zweimal ... umläuft, nimmt das Integral unendlich viele verschiedene Werte an, sodaß $\log z$ eine unendlichvieldeutige Funktion wird. Ein bestimmter Wert, der Hauptwert $[\log z]$, wird festgelegt, wenn wir die Ebene etwa längs der negativen reellen Achse aufschneiden und dem Integrationswege das Ueberschreiten dieses Querschnittes verbieten; willkürlich bleibt dabei nur, ob man die negativ reellen Werte von oben oder unten erreichen die Kurve $y = \log x$ ihrem ungefähren Verlaufe nach zeichnen. Um nun die *Funktionalgleichung* des Logarithmus möglichst einfach zu gewinnen, kann man etwa davon ausgehen, daß:

$$\int_1^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi},$$

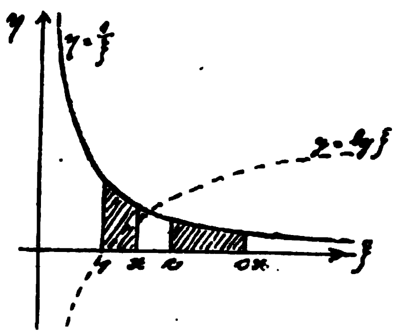
wie sich durch die Transformation $c\xi = \xi'$ der Integrationsvariablen ergibt; d. h. *der Flächeninhalt zwischen den Ordinaten 1 und x ist derselbe, wie zwischen den um das c-fache vom Nullpunkt entfernten c und cx.* Diese Tatsache kann man aber leicht geometrisch sehr anschaulich machen, indem man überlegt, *daß die Größe des Flächenstücks erhalten bleibt, wenn man es unter der Hyperbel entlang schiebt, und es dabei nur in dem Maße ausdehnt, wie die Höhe verringert wird.* Nach diesem Satze aber ergibt sich sofort das Additionstheorem:

$$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi}$$

Ich würde sehr wünschen, daß man diesen Weg recht bald einmal im Schulunterricht praktisch erproben möchte; wie sich dabei die Durchführung im einzelnen zu gestalten hat, das muß natürlich der erfahrene Schulmann entscheiden. Im Meraner Lehrplan haben wir übrigens noch nicht gewagt, diesen Weg als Norm vorzuschlagen.

unbekümmert um den Schulunterricht auf, indem er annimmt, daß das meiste daraus doch schon wieder vergessen ist. Es liegt ihm jedoch ganz fern, Vorschläge zur Reform des Schulunterrichts selbst zu machen, wie ich das tue.

Ich möchte nun hier noch einmal ganz kurz zusammenfassen, wie ich mir die Einführung der Logarithmen auf der Schule auf jenem einfachen und natürlicheren Wege etwa denken würde: Der oberste Grundsatz wäre, daß die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven ist. Das entspricht wie ich zeigte, einmal dem historischen Sachverhalt, ebenso aber auch dem Vorgehen in den höheren Teilen der Mathematik (vgl. z. B. die elliptischen Funktionen). In Verfolg dieses allgemeinen Prinzips geht man nun von der Hyperbel $\eta = \frac{1}{\xi}$ aus und bezeichnet den Flächeninhalt des unter ihr gelegenen Flächenstückes von der Ordinate $\xi = 1$ bis zu der $\xi = x$ als Logarithmus von x.



Indem man die Endordinate sich bewegen läßt, kann man aus der geometrischen Anschauung heraus die Änderung des Inhalts mit x qualitativ leicht übersehen, und daher pfehle. Ich will Ihnen da besonders Scheffers' Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik [1] nennen; da finden Sie pag. 232–350 eine sehr ausführliche Theorie des Logarithmus und der Exponentialfunktion, die ganz mit unserm Aufbau übereinstimmt, und der sich pag. 351–407 eine ähnliche Theorie der trigonometrischen Funktionen anschließt. Ich empfehle Ihnen sehr, von diesem Buche Kenntnis zu nehmen; es ist mit großer Kunst sehr bequem leserlich abgefaßt, damit es auch dem weniger Begabten leicht zugänglich ist. Sehr lehrreich ist es, die große pädagogische Geschicklichkeit zu beachten, die Scheffers besitzt, wenn er etwa – um nur ein Beispiel herauszugreifen – immer wieder hinweist, wie wenig an neuen Formeln man in der ganzen Logarithmenlehre inwendig zu lernen braucht, während man alles andere, wenn man es nur einmal verstanden hat, doch immer wieder nachlesen kann; dadurch ermuntert er seinen Leser immer aufs neue auch bei der anscheinend so großen Fülle des neuen Stoffes zum Ausharren. Nur in einem Punkte weicht Scheffers von meiner Tendenz ab: Er nimmt die Darstellung der Schule als gegeben vorliegend an, baut aber

1) Leipzig 1905

geraten; das ist eigentlich um so wunderbarer, als in den ersten Jahrzehnten eben dieses Jahrhunderts überhaupt erst die Ausbildung spezifisch mathematischer Lehramtskandidaten beginnt. Ich habe ja auf diese *Diskontinuität*, die hier lange bestand und jede Reform der Schultradition hinderte, schon in der Einleitung hingewiesen: Man kümmerte sich auf der Schule immer recht wenig darum, wie die Hochschule die gegebenen Ansätze etwa weiter ausbauen kann, und begnügte sich daher vielfach mit Definitionen, die vorläufig vielleicht ausreichen, weitergehenden Ansprüchen gegenüber aber versagen. Und umgekehrt gibt sich die Hochschule wieder häufig keine Mühe weiter, genau an das auf der Schule Gegebene anzuschließen, sondern sie baut ihr eigenes System auf und nur einzelnes wird mit dem nicht immer zutreffenden Hinweis: „Das habt ihr auf der Schule schon gehabt" abgetan.

Dem gegenüber ist doch die Bemerkung interessant, daß solche Hochschullehrer, die für weitere Kreise – Naturwissenschaftler und Techniker – Vorlesungen zu halten haben, von sich aus *in dieser Praxis zu einer ganz ähnlichen Einführung des Logarithmus gekommen sind, wie ich sie hier an-*

tionentheorie gleichfalls selbständig geschaffen und zuerst bekannt gemacht zu haben, gehört übrigens wieder Cauchy.

Das Ergebnis dieser Entwicklung im Beginn des 19.ten Jahrhunderts für unseren speziellen Gegenstand wäre etwa, daß die Einführung des natürlichen Logarithmus von der Hyperbelquadratur aus auch genau die gleiche Strenge besitzt, wie jede andere Methode, während sie obendrein, wie wir bereits sahen, an Einfachheit und Anschaulichkeit allen voransteht.

3. Einiges über den Schulbetrieb.

Freilich ist diese moderne Entwicklung merkwürdigerweise an dem Betriebe des Schulunterrichts in der Hauptsache spurlos vorbeigegangen, worauf ich ja schon öfters hinwies. Dort hilft man sich heute immer noch trotz aller Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten mit algebraischer Analysis und vermeidet jeden Infinitesimalkalkul, obwohl doch eben die Ideen des 18. Jahrhunderts vor diesem längst gegenstandslos geworden ist. Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, daß der mathematische Schulbetrieb und die vorwärtsgehende Forschung vom Beginn des 19. Jahrhunderts an gänzlich außer Kontakt nähere Ausführung solcher Beweise in moderner Gestalt verweise ich wiederum auf Burkhardts algebraische Analysis, oder auch auf Weber-Wellstein.

2.) Obwohl wir später erst ausführlich davon zu reden haben werden, muß ich hier schon die exakte Begründung der Infinitesimalrechnung durch Cauchy erwähnen; dadurch wird nämlich jener Behandlung der Logarithmen im 17. Jahrhundert volle mathematische Exaktheit verliehen.

3.) Endlich ist noch die Entstehung der Theorie aufzuführen, die allein erst zum vollen Verständnis der Logarithmus- und Exponentialfunktion verhelfen kann, der Theorie der Funktionen komplexen Arguments, kurzweg häufig „Funktionentheorie" genannt. Zuerst vollkommen überblickt hat die Grundzüge dieser Theorie wiederum Gauß, wenn er auch wenig oder gar nichts darüber publizierte. Für uns interessant ist vor allem ein Brief vom 18. Dezember 1811 an Bessel, der freilich viel später publiziert wurde (Werke Bd. VIII, pag. 90); hier wird nämlich mit wunderbarer Klarheit die Bedeutung des Integrales $\int_1^x \frac{dz}{z}$ in der komplexen Ebene geschildert, und erklärt, wie es eine unendlich vieldeutige Funktion darstellt. — Der Ruhm, die komplexe Funk-

$f(x+h)=(1+b)^{x+h}$ an: Für $x=0$ ist er damit im Besitze der gewünschten Exponentialreihe.

Ich möchte nun, meine Herren, diesen historischen Überblick, in dem ich natürlich immer nur die Namen allerersten Ranges nennen konnte, dadurch abschließen, daß ich noch kurz aufführe, was im 19. Jahrhundert an wesentlich neuen Wendungen hinzukam. Da habe ich an erster Stelle

1.) die genauen Begriffsbildungen über die Konvergenz unendlicher Reihen und anderer unendlicher Prozesse zu nennen. Allen voran geht da Gauß mit seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe von 1812 („Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\dots$")[1]; ihm folgt Abels Arbeit über die binomische Reihe von 1824 („Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\dots$")[2] während Cauchy in den zwanziger Jahren in seinem Cours d'analyse[3] zum ersten Male allgemeine Betrachtungen über Reihenkonvergenz anstellt. Das Resultat dieser Arbeiten für die hier in Betracht kommenden Reihen ist, daß alle früheren Entwickelungen jeweils im Konvergenzbereiche richtig sind, wobei die genauen Beweise freilich sehr kompliziert werden. Für die

---

1.) Comment. societ. reg. Gotting. recent. Vol. II 1813 = Werke Bd. III pag. 125.

2.) Crelles Journal f. d. r. u. a. Mathem. Bd. I. pag. 311.

3.) P. 1 Analyse algébrique. Paris 1821 = Oeuvres Sér. II Tom. III (Paris 1897).

nommen immer vorher zeigen, daß diese Funktion zu den „analytischen" gehört, d. h. daß sie sich überhaupt in eine Potenzreihe entwickeln läßt.

Nun beginnt Lagrange mit der Behandlung der Funktion $f(x) = x^n$, für rationales n und bestimmt $f'(x)$ als Koeffizienten von h in der Entwicklung von $(x+h)^n$, indem er die ersten beiden Glieder dieser wirklich ausgerechnet denkt; nach demselben Gesetz erhält er sofort auch $f''(x)$, $f'''(x)$ … und die binomische Entwicklung von $(x+h)^n$ ergibt sich als Spezialfall der Taylorschen Reihe für $f(x+h)$. Übrigens bemerke ich ausdrücklich, daß Lagrange den Fall irrationaler Exponenten n nicht weiter behandelt, sondern ihn selbstverständlich als mit erledigt betrachtet, wenn er alle rationalen Werte berücksichtigt hat; es ist interessant, sich das zu vergegenwärtigen, da man doch heute auf die genaue Herausarbeitung solcher Übergänge das größte Gewicht legt.

Diese Resultate verwendet Lagrange zur ganz analogen Behandlung der Funktion $f(x) = (1+b)^x$; indem er die Binomialreihe für $(1+b)^{x+h}$ umordnet, findet er nämlich $f'(x)$ als Koeffizient von h, bestimmt sodann nach demselben Gesetz $f''(x)$, $f'''(x)$ …, und setzt damit endlich die Taylorsche Reihe für und läßt n gegen ∞ konvergieren. Daß das in der Tat nichts als Grenzübergang vom Binom aus ist, sieht man, wenn man die fragliche Potenzentwicklung der „*Moivreschen Formel*"

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{\varphi}{n}\right)^n \cdot \left(1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

entnimmt. Übrigens benutzt Euler bei dieser Gelegenheit [1] auch das erste Mal den *Buchstaben π* für die Zahl, für die er seitdem stets benutzt wird.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der *Lagrangeschen Werke*, der „*Théorie des fonctions analytiques*" [2]. Auch hier ist zuerst zu betonen, daß Konvergenzfragen bei Lagrange höchstens ganz beiläufig behandelt werden. Wir wissen nun, daß Lagrange *nur solche Funktionen betrachtet, die durch Potenzreihen gegeben sind*, und ihre Differentialquotienten rein formal durch abgeleitete Potenzreihen definiert. Daher ist *für ihn die Taylorsche Reihe*

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}\,f''(x) + \ldots$$

einfach das Resultat einer formalen Umordnung der ursprünglich nach Potenzen von $x+h$ fortschreitenden Reihe $f(x+h)$; will er sie dann freilich auf eine bestimmte Funktion wirklich anwenden, so muß er genau ge-

1.) loc. cit. pag. 93.
2.) Paris 1797. — Abgedruckt in Lagrange, Oeuvres. T. IX. (Paris 1881); vgl. bes. Kap. III pag. 34 ff.

wo $e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist. Ob freilich die einzelnen Schritte dieses Verfahrens auch im heutigen Sinne <u>streng</u> berechtigt sind, ob z. B. die Summe der Grenzwerte der Reihenglieder wirklich den Grenzwert der Reihensumme liefert, darüber macht sich Euler weiter keine Sorge. Diese Ableitung der Exponentialreihe ist, wie Ihnen bekannt ist, für sehr zahlreiche Lehrbücher der Infinitesimalrechnung in ihrem Gedankengange vorbildlich geblieben, wobei man allerdings je länger je mehr die einzelnen Schritte für sich herausgearbeitet und auf den Nachweis ihrer exakten Gültigkeit Gewicht gelegt hat. Wie sehr bestimmend übrigens Eulers Buch für die ganze Entwickelung dieser Dinge geworden ist, sehen Sie daraus, daß der Gebrauch des Buchstabens e für jene ausgezeichnete Zahl von ihm ausgeht: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 ... constanter litteram e ..." heißt es auf pag. 90.

Ich darf hier vielleicht bald erwähnen, daß eine <u>ganz analoge Ableitung der Sinus- und Cosinusreihe</u> von Euler unmittelbar im Anschluß hieran gegeben wird. Er geht zu diesem Ende von der Entwickelung von $\sin \varphi$ nach Potenzen von $\sin \frac{\varphi}{n}$ aus-wie sich die Hauptvertreter dieser Richtung, Euler und Lagrange, zu der Exponentialfunktion und dem Logarithmus verhalten.

Beginnen wir mit Eulers „Introductio in analysin infinitorum" 1). Lassen Sie mich vorab die außerordentliche, bewunderungswürdige analytische Geschicklichkeit Eulers in allen seinen Entwicklungen rühmen, dabei aber bemerken, daß er noch keine Spur der Strenge besitzt, die man heute zu postulieren gewöhnt ist.

Euler stellt nun an die Spitze seiner Entwicklungen den binomischen Satz

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1}k + \frac{l(l-1)}{1\cdot 2}k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3 + \dots$$

für ganzzahligen Exponenten l; für nichtganzzahlige Exponenten betrachtet Euler das Binom in der Introductio überhaupt nicht. Diese Entwicklung spezialisiert er für den Ausdruck

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny},$$

wo $n\cdot y$ ganzzahlig ist; läßt er dann n – unter Aufrechterhaltung dieser Bedingung – zur Grenze ∞ übergehen, und nimmt rechts diesen Grenzprozess in jedem einzelnen Reihengliede vor, so erhält er die Exponentialreihe

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

1.) Lausanne 1748. Caput. VII. pag. 85 ff.

anzuführen haben werden. Die Funktion $y = \log.\,\mathrm{nat}\,x$ ist also in der Tat das, was man nach der gewöhnlichen Definition den Logarithmus von x mit der Basis e nennen würde, wobei hier e durch die Reihe, nicht als $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist.

3) Einen bequemeren Weg zur Ableitung der Exponentialreihe konnte Brook Taylor einschlagen, nachdem er in seiner „Methodus incrementorum“ [1] die nach ihm benannte allgemeine Reihenentwicklung aufgestellt hatte, von der wir später noch viel zu sprechen haben werden. Er brauchte dann nur aus der in der Integraldefinition des Logarithmus enthaltenen Relation

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

für die inverse Funktion zu schließen:

$$\frac{d\,e^y}{dy} = e^y,$$

und konnte als Spezialfall seiner allgemeinen Reihe die Exponentialreihe sofort hinschreiben.

Wir haben früher (S. 194.) gesehen, wie auf diese produktive Epoche die kritische, fast möchte ich sagen die Periode des moralischen Jammers, folgte, wo man vor allem die neu gewonnenen Resultate sicher zu fundieren und das möglicher Weise Falsche abzutrennen suchte. Wir müssen nun näher zusehen,

---

1.) Londini 1715

und gliederweise Integration erhält; ich habe das ja schon früher (S. 191) als bahnbrechenden Fortschritt der Mathematik auffassen können.

2.) Damals habe ich gleichfalls berichtet, dass *Newton* diese Ideen Mercators aufgriff und durch zwei neue äusserst wertvolle Ansätze bereicherte: *den allgemeinen binomischen Satz und die Methode der Reihenumkehrung.* Das findet sich bereits in einer Jugendarbeit Newtons „*de analysi per aequationes numero terminorum infinitas*" [1] die erst spät gedruckt wurde, aber von *1669* an schon handschriftlich verbreitet war. Dort [2] leitet Newton aus der Mercatorschen Reihe für $y = \log nat\, x$ zum ersten Male *durch Umkehren die Exponentialreihe* ab:

$$\underline{x = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots} .$$

Als Zahl, deren natürlicher Logarithmus $y = 1$ ist, ergibt sich hieraus

$$\underline{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots} ,$$

und nun kann man mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus leicht exakt schliessen, *dass für jedes rationale y im Sinne der gewöhnlichen Potenzdefinition x einer der Werte von e^y ist, und zwar der positive*, wie wir das später noch näher aus-

1) J. Newtoni Opuscula, Tom. I. (Lausannae 1744). op. 1: Zuerst erschienen 1711.
2.) loc. cit. pag. 20.

auf 3 Dezimalen übereinstimmt.

Lassen Sie uns nun aber noch ansehen, wie die historische Entwicklung der Theorie der Logarithmen nach Neper und Bürgi weiterging! Ich habe da an erster Stelle zu erwähnen, daß

1.) der schon früher genannte Mercator als einer der ersten sich der Definition des natürlichen Logarithmus durch den Hyperbelinhalt bedient; in seinem Buche „Logarithmotechnica" sowie in einigen Abhandlungen in den Philosophical Transactions der Londoner Akademie von 1667 und 1668 zeigt er eigentlich von demselben Gedankengange aus, den ich soeben in moderner Sprache dargestellt habe, daß $f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ sich von dem gewöhnlichen Logarithmus mit der Basis 10 – wie man sie damals bereits zum Rechnen gebrauchte – nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, den sog. Modul des Logarithmensystems. Übrigens hat er auch die Bezeichnung „natürlicher Logarithmus" oder auch „hyperbolischer Logarithmus" bereits selbst eingeführt.[1] Die größte Leistung Mercators aber ist die Aufstellung der Potenzreihe für den Logarithmus, die er – dem Sinne nach – aus der Integraldarstellung durch Ausdividieren

1.) Phil. Trans. III (1668). pag. 761.

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2).$$

In der Tat sind bei Variation von x_1, x_2 die Zuwächse beider Seiten nach der Integraldefinition $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ bezw. $\frac{d(x_1 \cdot x_2)}{x_1 \cdot x_2}$, also einander gleich; daher können sich $f(x_1) + f(x_2)$ und $f(x_1 \cdot x_2)$ nur um eine Konstante C unterscheiden, und diese ergibt sich gleich 0, wenn wir $x_1 = 1$ setzen (da ja $f(1) = 0$).

Wollen wir aber die *„Basis" der so gewonnenen Logarithmen* erkennen, so brauchen wir nur zu bemerken, daß der Übergang von der Rechteckreihe zum Hyperbelinhalt sich so vollziehen läßt, daß man auf der Abscissenachse immer um $\Delta\xi = \frac{\xi}{n}$ statt um $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ vorwärts geht und n beliebig groß werden läßt; das heißt aber nichts, als daß man die Bürgische Wertefolge $x = (1{,}0001)^{10000y}$ durch $x = (1 + \frac{1}{n})^{ny}$ ersetzt, wo $n \cdot y$ alle ganzen Zahlen durchläuft. Nach der allgemeinen Potenzdefinition kann man das auch so aussprechen, daß x die y^{te} Potenz von $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist, und demgemäß erscheint es plausibel, *daß nach Ausführung des Grenzüberganges $\lim\limits_{n=\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ die Basis wird*, also gerade der Grenzwert, den man gemeinhin als Definition von *e* an die Spitze stellt. Übrigens ist es interessant zu bemerken, daß die Bürgische Basis $(1{,}0001)^{10000} = 2{,}718146\ldots$ mit e bereits-

Von dieser letzten Deutung aus wird man nun unmittelbar zum natürlichen Logarithmus geführt, indem man statt der Rechtecksumme direkt den von der Hyperbel selbst zwischen den Ordinaten $\xi = 1$, $\xi = x$ umschlossenen Flächeninhalt verwendet (in der Figur schraffiert); in der Formel drückt sich das bekanntlich aus:

$$\log \text{nat}\, x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}.$$

Das war nun in der Tat auch der historische Weg und zwar tat man den entscheidenden Schritt um 1650, als die analytische Geometrie bereits Gemeingut der Mathematiker war, und die Infinitesimalrechnung mit den Bestrebungen zur Quadratur der bekannten Kurven einsetzte.

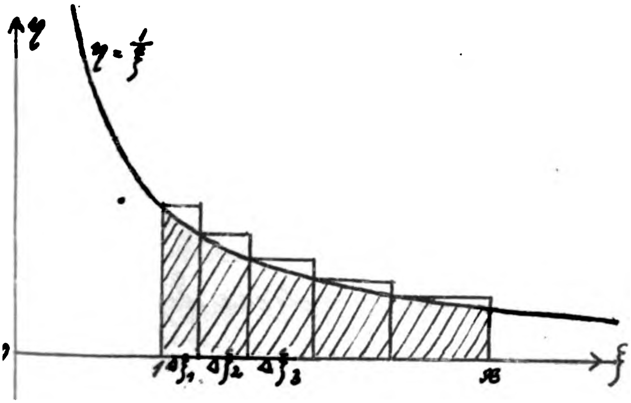
Natürlich müssen wir, wenn wir diese Definition des natürlichen Logarithmus akzeptieren, uns vor allem überzeugen, daß er auch wirklich die Fundamentaleigenschaft besitzt, die Multiplikation der Zahlen durch die Addition der Logarithmen zu ersetzen, — oder, modern gesprochen, wir müssen nachweisen, daß die durch den Hyperbelinhalt definierte Funktion

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$$

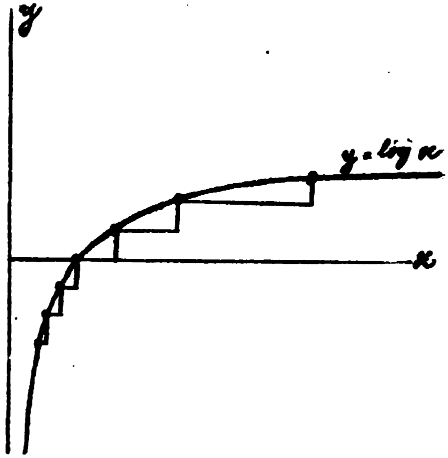
das einfache Additionstheorem besitzt:

$$(4) \qquad y = \sum_{1}^{x} \frac{\Delta\xi}{\xi};$$

die Summation ist so verstanden, daß ξ diskontinuierlich von 1 bis x um solche Stufen wächst, daß das zugehörige $\Delta y = \frac{\Delta\xi}{\xi}$ stets konstant gleich 10^{-4} bzw. -10^{-7} wird, was also $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ bzw. $-\frac{\xi}{10^7}$ ergibt. Dies Verfahren kann man nun in der Tat sehr leicht geometrisch aussprechen: Man zeichne in einer ξ-y-Ebene die Hyperbel $y = \frac{1}{\xi}$ und konstruiere auf der ξ-Achse vom Punkte $\xi = 1$ an beginnend alle Punkte, die man nach dem Fortschreitungsgesetz $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ (um etwa bei der Bürgischen Formulierung zu bleiben) successive erreicht. Über jedem der so entstehenden Intervalle zeichne man das Rechteck mit der Höhe $\frac{1}{\xi}$, das den über ξ liegenden Hyperbelpunkt zur Ecke hat und den konstanten Inhalt $\Delta\xi \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{10^4}$ besitzt. Der Bürgische Logarithmus von x ist sodann nach (4) gerade die Summe aller dieser zwischen 1 und x gelegenen der Hyperbel eingeschriebenen Rechtecke. Analoges gilt für den Neperschen Logarithmus.



genügende Zahlenreihe, in der die y einmal in Stufen von 0,0001, das andremal von 0,0000001 fortschreiten.



Wollen wir uns der Bequemlichkeit halber bereits erlauben, das Bild der stetigen Exponentialkurve zu benutzen, – eigentlich sollen wir es ja durch unsere Erörterungen erst gewinnen – so können wir uns die der Napierschen bzw. Bürgischen Zahlenreihe entsprechenden Punkte $(x|y)$ mit einem Worte anschaulich vor Augen stellen als die Eckpunkte einer in die Exponentialkurve

(3) $x = (1{,}0001)^{10000\,y}$ bzw. $x = (0{,}9999999)^{10000000\,y}$

eingezeichneten Treppe der konstanten Stufenhöhe $\Delta y = 0{,}0001$ bzw. $\Delta y = 0{,}0000001$ – wie dies nebenstehend schematisch angedeutet ist.

Eine andere geometrische Deutung, bei der wir die Exponentialkurve noch nicht vorauszusetzen brauchen, die uns vielmehr den naturgemäßen Weg zu ihr zeigen wird, erhalten wir, wenn wir die Differenzengleichung (2) durch folgende Summengleichung ersetzen (gewissermaßen sie „integrieren“):

rechnen wir nun im Bürgischen Systeme die Potenzen für zwei benachbarte Exponenten y und $y+1$:

$$x = (1{,}0001)^y \quad , \quad x + \Delta x = (1{,}0001)^{y+1}$$

Durch Subtraktion folgt

$$\Delta x = (1{,}0001)^y (1{,}0001 - 1) = x \cdot \frac{1}{10^4}$$

oder, wenn wir an Stelle der Differenzen 1 der beiden Exponentenworte allgemein Δy schreiben:

$$(1^{a}) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x} .$$

Wir haben so eine Differenzengleichung für die Bürgischen Logarithmen, die Bürgi selbst bei der Berechnung seiner Tafel direkt anwendet: Hat er den zu einem y gehörigen Wert x bestimmt, so erhält er den jeweils folgenden zu $y+1$ gehörigen durch Addition von $\frac{x}{10^4}$. – Ebenso ergibt sich, daß die Neperschen Logarithmen der Differenzengleichung

$$(1^{b}) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x}$$

genügen. Um die nahe Verwandtschaft beider Systeme zu erkennen, brauchen wir nur das eine Mal statt der Zahlen y die Zahlen $\frac{y}{10^4}$, das andere Mal die $-\frac{y}{10^7}$ zu betrachten (d. h. das Dezimalkomma der Logarithmen versetzen); bezeichnen wir die neuen Zahlen dann wieder schlechtweg mit y, so ergibt sich jedesmal eine der gleichen Differenzengleichung

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

Schule durch jenen Übergang zu gebrochenem y, von dem vorhin die Rede war. Neper und Bürgi vermeiden aber alle Schwierigkeiten, die sich so ergeben, indem sie mit der Intuition des Genies die Sache gleich am richtigen Ende anfassen. Sie haben nämlich den einfachen und glücklichen Gedanken, die Basis b sehr nahe an der Einheit zu wählen, denn dann rücken in der Tat auch bereits die successiven ganzzahligen Potenzen von b sehr nahe aneinander. Bürgi nimmt

$$b = 1{,}0001,$$

während Neper einen Wert unterhalb 1 verwendet:

$$b = 1 - 0{,}0000001 = 0{,}9999999,$$

oder noch näher an die 1 heran geht. Der Grund für diese Abweichung Nepers vom heutigen Usus ist der, daß er von vornherein die Anwendung auf trigonometrische Rechnungen im Auge hat; da handelt es sich nämlich vor allem um die Logarithmen echter Brüche (Sinus und Cosinus), die für $b > 1$ negativ, für $b < 1$ aber positiv werden. Beiden Forschern gemeinsam ist aber die Hauptsache, daß sie nur ganzzahlige Potenzen dieses b verwenden, und daher um die Vieldeutigkeit, die uns vorhin genierte, vollkommen herumkommen. – Be-seinem Tode als „mirifici logarithmorum canonis constructio" 1) publiziert.

Unabhängig von Neper hatte der Schweizer Jobst Bürgi (1552–1632) eine Tafel berechnet, die er aber erst 1620 zu Prag unter dem Titel „Progreßtabulen" erscheinen ließ. Wir Göttinger müssen an Bürgi ein besonderes landsmännisches Interesse nehmen, da er lange in Cassel gelebt hat; überhaupt ist Cassel und speziell die alte Sternwarte daselbst für die Entwicklung der Arithmetik, Astronomie, Optik vor Erfindung der Infinitesimalrechnung eine äußerst wichtige Stätte, so wie dann später Hannover als Wohnort von Leibniz wichtig wird. Wir haben also hier in unserer Nähe auch lange vor Gründung der Universität für unsere Wissenschaft historisch wichtigen Boden.

Es ist nun sehr lehrreich, den Gedankengang von Neper und Bürgi sich näher anzusehen. Beide gehen von den Werten $x = b^y$ für ganzzahlige y aus und wollen es nun so einrichten, daß die Zahlen x möglichst dicht liegen, um so dem schließlichen Ziele – jeder Zahl x einen Logarithmus zuzuordnen – möglichst nahe zu kommen; das erreicht man heute auf der

1) Lugduni 1620. Neudruck Paris 1895.

mentafel, die überhaupt existiert, und die freilich sehr *rudimentär* ist: sie enthält lediglich die ganzen Zahlen von -3 bis 6 als Exponenten neben die zugehörigen Potenzen $\frac{1}{8}$ bis 64 von 2 gestellt. Freilich scheint Stifel eine Vorstellung von der Bedeutung der hiermit beginnenden Entwicklung gehabt zu haben, denn er bemerkt, daß man über diese merkwürdigen Zahlenbeziehungen ein ganzes eigenes Buch schreiben könne.

Um die Logarithmen im *praktischen Rechnen* zur Geltung bringen zu können, dazu fehlte Stifel noch ein wichtiges Hilfsmittel, *die Dezimalbrüche*, und erst als man diese besaß – *nach 1600* – war die *Möglichkeit zur Ausbildung wirklicher Logarithmentafeln* gegeben. Die erste Tafel rührt von dem Schotten *John Napier* (oder *Neper*) her, der 1550–1617 lebte, dem eigentlichen Erfinder der Logarithmen, der übrigens auch dies Wort geprägt hat; sie erschien *1614 zu Edinburgh* unter dem Titel „*mirifici logarithmorum canonis descriptio*", und welche Begeisterung sie erregte, sehen Sie aus den sehr amüsanten ihr vorgedruckten Versen, in denen verschiedene Autoren die Vortrefflichkeit der Logarithmen besingen. Übrigens wurde Nepers Verfahren zur Berechnung der Logarithmen erst nach kennen lernen, warum jene anscheinend willkürlichen Festsetzungen zu einem vernünftigen Resultate führen müssen. – Kurz wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir den historischen Werdegang einmal in großen Zügen verfolgen; Sie werden sehen, daß er keineswegs jener Schulpraxis entspricht, sondern daß diese sich zu ihm wie eine von recht ungünstigen Standpunkte aus genommene Projektion verhält.

Wir haben da zunächst aus dem 16. Jahrhundert einen deutschen Mathematiker, den Schwaben Michael Stifel zu nennen, der 1544 in Nürnberg seine Arithmetica integra erscheinen ließ; das ist also in der Zeit des ersten Beginnes der modernen Algebra, ein Jahr bevor des Cardanus schon genanntes Werk gleichfalls in Nürnberg erschien. Ich kann Ihnen dieses Buch, wie auch die meisten der weiterhin zu erwähnenden aus unserer sehr reichhaltigen Universitätsbibliothek hier vorlegen. Sie finden dort zum ersten Male das Rechnen mit Potenzen von beliebigen rationalen Exponenten, und besonders betont auch die Multiplikationsregel; ja Stifel gibt sogar (pag. 250) wohl die erste Logarith-

Diese Definition von e und seine Benutzung als Basis wird nun meistens, besonders auch nach französischem Muster in den großen Lehrbüchern der Analysis, unvermittelt an die Spitze gestellt, wobei dann freilich gerade das eigentlich wertvolle, das Verständnis vermittelnde Element fehlt: *eine Erklärung, warum man gerade diesen merkwürdigen Grenzwert als Basis verwendet und die entstehenden Logarithmen natürliche nennt*. Ebenso tritt die *Reihenentwicklung* vielfach ganz unvermittelt auf; man setzt einfach formal an:

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

berechnet die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots$ aus den bekannten Eigenschaften des Logarithmus und zeigt allenfalls noch für $|x| < 1$ die Konvergenz. Unberührt aber bleibt dabei wiederum, *wie man denn überhaupt dazu kommt, bei einer Funktion und gar noch bei einer so willkürlich zusammengestückelten, wie es der Logarithmus nach der Schuldefinition ist, die Möglichkeit einer Potenzreihenentwicklung auch nur zu vermuten*. –

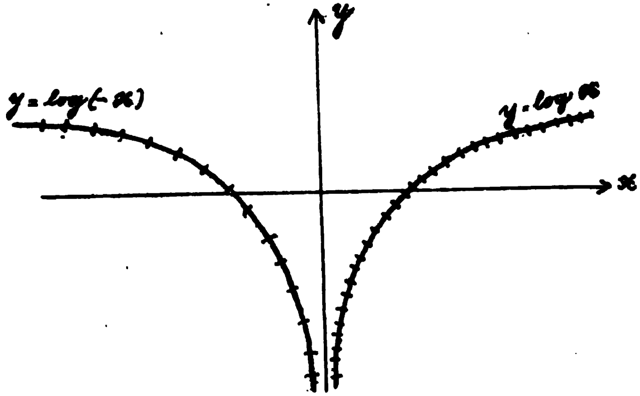
2. Die historische Entwickelung der Theorie.

Wollen wir nun *alle die inneren Zusammenhänge* finden, die wir hier vermissen, und die tieferen Gründe auch recht überzeugenden *autoritativen Feststellung, daß man $b > 0$ und die positiven Hauptwerte nehmen muß, und daß alles andere falsch ist*; hierauf begründet sich dann der Satz, daß der *Logarithmus eine eindeutige nur für positive Argumente definierte Funktion* ist.

Hat man die Theorie des Logarithmus soweit gefördert, so bekommt der Schüler die *Logarithmentafel* in die Hand, und muß sie zum *praktischen Rechnen* gebrauchen lernen; dabei mag es freilich auch noch Schulen geben, – zu meiner Schulzeit war das die Regel – wo nicht viel davon gesagt wird, wie eine solche Tafel denn *berechnet* ist. Daß wir einen solchen jedem höheren Unterrichtsprinzipe Hohn sprechenden schnöden Utilitarismus aufs schärfste verurteilen müssen, ist selbstverständlich. Aber meistens wird man heute doch wohl schon von der *Berechnung der Logarithmen* sprechen, und an vielen Schulen zu diesem Zwecke auch die *Lehre von den natürlichen Logarithmen* und der *Reihenentwicklung* heranziehen.

Was die erstere angeht, so ist bekanntlich die *Basis des natürlichen Logarithmensystems*:

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots$$



Hauptwerte $x = e^y$ eine überall dichte Menge auf unserer Kurve. Würden wir nun bei geraden Nenner n von y allemal auch die zugehörigen negativen Werte x markieren, so erhalten wir eine, man möchte sagen „*halb so dichte*", aber immer noch „*überall dichte*" Punktmenge auf dem Spiegelbilde unserer Kurve in Bezug auf die y-Achse $(y = \log(-x))$. Es ist nun so unmittelbar durchaus nicht zu begreifen, *warum*, wenn man jetzt sämtliche reellen, auch irrationalen Werte y zuläßt, *sich gerade die Hauptwerte rechts zu einer kontinuierlichen, durchaus regulär verlaufenden Kurve ergänzen lassen*, und ob und warum nicht auch die negativen linken Werte eine ähnliche Vervollständigung gestatten. Wir werden sehen, daß wir das nur mit tieferen funktionentheoretischen Hilfsmitteln voll werden verstehen können, mit Hilfsmitteln, die der Schule nicht zu Gebote stehen können. Und darum verzichtet man dort eben auf das innere Verständnis der Sachlage, und begnügt sich meist mit der für den Schüler freilich für Variable geläufigen Bezeichnungen x, y einzuführen, so daß unsere Grundgleichungen sind:

$$x = b^y, \quad y = \log_{(b)} x.$$

Nun nimmt man zunächst b stets positiv; bei negativem b würde nämlich x für ganzzahlige y abwechselnd positive und negative Werte annehmen, für rationale y aber gar vielfach imaginäre Werte, und die Gesamtheit dieser Wertepaare x, y würde keinen stetigen Kurvenzug bilden können. Aber auch für $b > 0$ läßt nicht ohne anscheinend ganz willkürliche Festsetzungen auskommen. Denn für ein rationales $y = \frac{m}{n}$ (wo m, n teilerfremd seien), ist bekanntlich $x = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ definiert; diese Wurzel hat aber n Werte, und, selbst wenn wir uns auf reelle Zahlen beschränken, für gerades n noch 2 Werte; die Festsetzung ist nun die, daß x stets gleich dem positiven Wurzelwert, dem sog. Hauptwert sein soll. Was das besagt, wollen wir uns einmal an der Hand des wohlbekannten Bildes der Logarithmuskurve $y = \log x$ überlegen, das ich für den Moment der größeren Deutlichkeit halber hier wohl bereits benutzen will.

Durchläuft y die überall dicht liegende Menge der rationalen Zahlen, so bilden die positiven

tiven und schließlich zu gebrochenen c vor; damit ist auch der Begriff der Wurzel dem allgemeinen Potenzbegriff eingeordnet. Ohne auf das Potenzieren näher einzugehen, will ich nur die Multiplikationsregel hervorheben:

$$b^c \cdot b^{c'} = b^{c+c'},$$

die die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition der Exponenten zurückführt. Die Möglichkeit einer solchen Reduktion, die bekanntlich grundlegend für das logarithmische Rechnen ist, liegt formal darin begründet, daß die Grundgesetze der Multiplikation und Addition weitgehend übereinstimmen, indem beide Operationen sowohl kommutativ, als auch assoziativ sind.

Die Umkehrung der Operationen des Potenzierens liefert den Logarithmus: Man nennt c den Logarithmus von a zur Basis b:

$$c = \log_b a \, .$$

Hierbei ergeben sich aber bereits eine Reihe innerer Schwierigkeiten, über die man meistens hinweggeht, ohne sie recht aufzuklären, und die wir gerade deshalb uns hier recht deutlich machen wollen. Dabei wird es bequem sein, für a und c, deren gegenseitige Abhängigkeit wir studieren wollen, die

Math. Ann. 61. pag. 50 ff. – 1905) einsehen.

Dritter Hauptteil: Analysis.

Wir wollen uns nun in der zweiten Hälfte des Semesters damit beschäftigen, einzelne von unserem Standpunkte aus wichtige Kapitel der Analysis ähnlich zu behandeln, wie im vorhergehenden die Arithmetik und Algebra. Das wichtigste wird sein, daß wir von den elementaren transzendenten Funktionen reden, die ja im Schulunterricht eine große Rolle spielen: der Exponentialfunktion bezw. dem Logarithmus, und den trigonometrischen Funktionen.

Lassen Sie uns beginnen mit der Behandlung von

I. Logarithmus und Exponentialfunktion.

Zunächst möchte ich kurz an den Ihnen allen bekannten Gang der Schule und seine Fortsetzung erinnern, der sich der sog.

1. Systematik der algebraischen Analysis anschließt. Man geht da von der Potenz $a = b^c$ aus, und nimmt die bekannte Steigerung von ganzzahlig positiven Exponenten c zu ganzzahlig nega-

liche Analogon der Lösung reiner Gleichungen mit Logarithmen.

Das ist die vollständige Lösung des Problems der Gleichung 5. Grades; man darf eben nur, wenn etwas auf dem gewöhnlichen Wege nicht geht, nicht bald resignieren und bei der Feststellung der Unmöglichkeit bleiben, sondern man muss nur das richtige Ende finden, an dem sich die Sache anfassen und weiter fördern lässt. Der mathematische Gedanke als solcher hat nie ein Ende, und sagt Ihnen jemand, meine Herren, dass an einer Stelle das mathematische Verständnis aufhört, so seien Sie überzeugt, dass da die eigentlich interessante Fragestellung erst einsetzen muss.

Und so möge zum Schluss noch angedeutet sein, dass diese Theorieen mit der Gleichung fünften Grades nicht etwa aufhören; *man kann vielmehr auch für Gleichungen sechsten und höheren Grades ganz analoge Entwicklungen aufstellen*, wenn man nur *reguläre Körper in höheren Dimensionen* heranzieht. Wollen Sie darüber sich näher orientieren, so mögen Sie meine Arbeit „*Über die Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. und 6. Grades*" (Journ. f. reine u. angew. Math. 129 (1905) pag 151 ff und zeichen benutzt.

Was aber die Gleichung fünften Grades anlangt, so beschränkt man sich in den Lehrbüchern leider meist auf die Feststellung des negativen Resultates, daß man sie durch eine Folge von Wurzelzeichen nicht lösen kann, und dazu kommt dann ebenfalls noch die dunkle Andeutung, daß die Lösung durch elliptische Funktionen – genau müßte es heißen: elliptische Modulfunktionen – möglich wird. Ich möchte an dieser Darstellung tadeln, daß sie da eine ganz schiefe Gegenüberstellung gibt, und das wahre Verständnis der Sachlage eher hindert, als fördert. In der Tat muß es, wie wir auf Grund des jetzt gewonnenen Überblickes resumieren können, so heißen, wenn wir einen algebraischen und analytischen Teil unterscheiden:

1.) Die allgemeine Gleichung 5. Grades läßt sich zwar nicht auf reine Gleichungen zurückführen, wohl aber gelingt – und das ist das eigentliche Problem der algebraischen Lösung – ihre Reduktion auf die Ikosaedergleichung als einfachste Normalgleichung.

2.) Die Ikosaedergleichung ihrerseits läßt sich durch elliptische Modulfunktionen lösen, und das ist das zur numerischen Berechnung verwendbare völdiese Formeln unmittelbar die Lösung der kubischen Gleichung (1).

Ganz ähnlich läßt sich nun die Reduktion der allgemeinen Gleichung vierten und fünften Grades gestalten. Die Gleichungen werden natürlich etwas länger aber prinzipiell nicht schwieriger; neu ist nur, daß der Parameter w der Normalgleichung, der vorhin sich rational durch die Gleichungskoeffizienten ausdrückte ($2w = -27\frac{q^2}{p^3} - 2$) noch Quadratwurzeln enthält. Sie finden diese Theorie für die Gleichung fünften Grades bezw. das Ikosaeder ganz ausführlich im 2. Teile meiner Vorlesungen über das Ikosaeder dargestellt, und zwar so, daß nicht etwa bloß die Formeln berechnet werden, sondern immer die inneren Gründe für das Zustandekommen der Gleichungen hervorgekehrt werden.

Lassen Sie mich endlich noch ein Wort über die Stellung dieser Entwickelungen zu der gewöhnlich gegebenen Theorie der Gleichungen 3ten 4ten 5ten Grades sagen. Die gewöhnlichen Lösungen der kubischen und biquadratischen Gleichung zunächst kann man aus unseren Formeln natürlich durch geeignete Umrechnungen erhalten, wenn man die Lösung der Gleichungen des Dieders, Oktaeders, Tetraeders durch Wurzel-die bei den 6 Vertauschungen dieser 3 Größen gerade die 6 linearen Substitutionen des Dieders für $n = 3$ erleidet, d. h. die Werte

$$z,\ \varepsilon \cdot z,\ \varepsilon^2 \cdot z,\ \frac{1}{z},\ \frac{\varepsilon}{z},\ \frac{\varepsilon^2}{z},\ \left(\text{wo } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

annimmt; man sieht leicht, daß

$$(2) \qquad \underline{z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3}}$$

diesen Bedingungen genügt. Die Diederfunktion $z^3 + \frac{1}{z^3}$ dieser Größe, muß also bei <u>allen</u> Vertauschungen der x_k ungeändert bleiben, da sie die 6 linearen Substitutionen des z ungeändert lassen; sie ist also einem bekannten Satze der Algebra zufolge als rationale Funktion der Koeffizienten von (1) darstellbar, und zwar ergibt die Rechnung:

$$(3) \qquad \underline{z^3 + \frac{1}{z^3} = -27\frac{q^2}{p^3} - 2} \, .$$

Hat man nun aber umgekehrt diese Diedergleichung gelöst und ist z eine ihrer Wurzeln, so kann man aus (2) mit Hilfe der bekannten Relationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = p, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = q$$

die 3 Werte x_1, x_2, x_3 rational durch z, p, q ausdrücken und zwar findet man:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{z(1+z)}{1+z^3} \\ x_2 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3} \\ x_3 &= -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3} . \end{aligned} \right.$$

<u>Sowie man also die Diedergleichung (3) gelöst hat, geben</u>

vollständig zu beherrschen.

Diese letzte Bemerkung führt uns nun zu dem letzten Abschnitt dieses Kapitels, in dem wir einen Überblick über die

8. Zurückführung allgemeiner Gleichungen auf unsere Normalgleichungen

geben wollen. Es zeigt sich nämlich, daß man die allgemeinste Gleichung

3. Grades auf die Diedergleichung für $n = 3$
4. Grades auf die Tetraeder- oder Oktaedergleichung
5. Grades auf die Ikosaedergleichung

zurückführen kann. Dies Resultat ist der neueste Triumph der regulären Körper, die ja seit dem Beginn der mathematischen Geschichte immer wieder eine wichtige Rolle gespielt haben.

Um Ihnen den Sinn meiner allgemeinen Behauptung näher zu bringen, will ich sie im einfachsten Falle, für die Gleichung dritten Grades etwas eingehender ausführen, ohne indessen die Formeln vollständig zu beweisen. Wir setzen die kubische Gleichung wieder in der reduzierten Form voraus:

$$(1) \qquad x^3 + px - q = 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 ihre Lösungen, so suchen wir eine solche rationale Funktion z von ihnen zu bilden, gen der Algebra noch hängen gebliebene Bezeichnung, *daß man nämlich algebraische Gleichungen, die nicht durch Wurzelzeichen lösbar, d. h. nicht auf reine Gleichungen reduzierbar sind, „nicht algebraisch lösbar" nennt*. Das steht zu der modernen Bedeutung des Wortes „algebraisch" in schärfstem Widerspruche. Heute muß man *algebraisch lösbar eine Gleichung dann nennen, wenn man sie auf eine Kette möglichst einfacher Gleichungen zurückführen kann, bei denen man die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern, den Zusammenhang der verschiedenen Wurzelwerte untereinander etc. so vollständig beherrscht, wie man das von altersher bei der reinen Gleichung tut; reine Gleichungen aber brauchen das durchaus nicht zu sein.* In diesem Sinne werden wir die *Ikosaedergleichung als durchaus algebraisch lösbar* bezeichnen können, denn unsere ganzen Darlegungen zeigten ja, daß wir ihre Theorie in einer allen Ansprüchen genügenden Weise ausbauen können. Daß sie mit Wurzelzeichen nicht lösbar ist, verleiht ihr vielmehr ein ganz besonderes Interesse, da sie so *als geeignete Normalgleichung erscheint, auf die man weitere gleichfalls im alten Sinne nicht algebraisch lösbare Gleichungen zurückzuführen versuchen wird*, um so auch ihre Lösung

Oktaeders, und sofort rationale Funktionen $R(z(w))$ möglich, die an 2 Stellen gleichartige Verzweigung aufweisen, z. B. eine solche mit je 2 zusammenhängenden Blättern bei 1 und ∞, und diese sind dann wirklich als Wurzeln aus einer rationalen Funktion $P(w)$ darstellbar. *So kommt beim Oktaeder, und ebenso beim Tetraeder* (mit den Zahlen $\underline{3}, 2, \underline{3}$) *und beim Dieder* ($\underline{2}, \underline{2}, n$) *die Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen zu Stande.*

Ich möchte hier allgemein darauf hinweisen, wie wenig der in weiten mathematischen Kreisen herrschende Sprachgebrauch mit den Fortschritten der Erkenntnis Schritt hält. Man gebraucht heute *das Wort Wurzel* fast allgemein in zweierlei Sinne: einmal für die Lösung jeder algebraischen Gleichung und dann prägnant für die Lösung einer reinen Gleichung. Dieser Usus stammt natürlich noch aus der Zeit, wo man sich nur mit reinen Gleichungen beschäftigte; heute ist er, wenn nicht geradezu schädlich, so doch zum mindesten recht unbequem; nehmen Sie nur die Formulierung, daß die „Wurzeln" einer Gleichung nicht durch „Wurzelzeichen" darstellbar sind. Wesentlich mehr zu Mißverständnissen Anlaß gibt wohl eine andere aus den Anfänler und Nenner

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots = \alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots$$

ist. Nun können sicher nicht *alle* Exponenten $\alpha, \beta \ldots$, $\alpha', \beta' \ldots$ durch p teilbar sein, da sonst P eine volle p^{te} Potenz wäre; da ferner die Summe aller $\alpha+\beta+\ldots-\alpha'-\beta'-\ldots$ gleich Null und daher durch p teilbar ist, kann nicht bloß *eine* dieser Zahlen nicht durch p teilbar sein, sondern *mindestens 2* müssen diese Eigenschaft haben. *Die Nullstellen der entsprechenden Linearfaktoren müssen also sicherlich beides solche Verzweigungsstellen von $\sqrt[p]{P(w)}$ sein, an denen immer je p Blätter im Zyklus zusammenhängen. Damit ist aber der Widerspruch mit dem zuerst ausgesprochenen Satze gewonnen*, der ja für $\sqrt[p]{P(w)}$ gleichfalls gelten muß: Denn dort haben wir ja alle möglichen Verzweigungen aufgezählt, und unter ihnen sind nicht 2 mit der gleichen Anzahl zusammenhängender Blätter enthalten. Also war unsere Annahme falsch, *und die Ikosaedergleichung ist jedenfalls durch Wurzelzeichen nicht lösbar.*

Dieser Beweis beruht wesentlich darauf, *daß die für das Ikosaeder charakteristischen Zahlen 3, 2, 5 keine gemeinsamen Teiler haben*. Sowie das nämlich der Fall ist, wie etwa bei den Zahlen 3, 2, 4 der

Gegen diesen Satz wollen wir nun einen Widerspruch herleiten, indem wir die innerste Wurzelgröße betrachten, die in dem hypothetisch angenommenen Ausdrucke für unser $\varphi(w)$ auftritt. Sie muß jedenfalls aus einer rationalen Funktion $P(w)$ gezogen sein, und wir können ihren Exponenten als Primzahl p voraussetzen, da wir jede andere Wurzelgröße sofort aus solchen mit Primzahlexponenten aufbauen können. Überdies darf $P(w)$ keine p^{te} Potenz einer rationalen Funktion $\varrho(w)$ von w sein, denn sonst wäre unsere Wurzelgröße überhaupt überflüssig, und wir könnten unsere Betrachtungen auf das nächste wirklich notwendige Wurzelzeichen beziehen.

Wir wollen nun zusehen, was für Verzweigungen dies $\sqrt[p]{P(w)}$ besitzen kann; dazu ist es am bequemsten homogen zu schreiben:

$$P(w) = \frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

wo g, h Formen gleicher Dimension der homogenen Variablen w_1, w_2 $\left(w = \frac{w_1}{w_2}\right)$ sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir g und h in Linearfaktoren spalten und finden:

$$P(w) = \frac{l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot n^{\gamma} \dots}{l'^{\alpha'} \cdot m'^{\beta'} \cdot n'^{\gamma'} \dots},$$

wo wegen der Gleichheit der Dimensionen von Zähler-

Da aber alle Wurzeln der Ikosaedergleichung aus irgend einer z von ihnen durch lineare Substitutionen hervorgehen, so können wir für diesen letzten Ausdruck auch einfach eine *rationale Funktion $R(z)$ von z allein setzen*. Betrachten wir nun diese $R(z)$ als Funktion von w, indem wir für z die 60-wertige Ikosaederfunktion $z(w)$ eingesetzt denken. Da jeder Umlauf in der w-Ebene, der z zu seinem Ausgangswert zurückführt, notwendig auch $R(z)$ wieder in seinen Ausgangswert überführt, kann R nur an den Stellen $w = 0, 1, \infty$ verzweigt sein, wo $z(w)$ es ist, und die Anzahl der an jeder dieser Stellen jedesmal im Zyklus zusammenhängenden Blätter der Riemannschen Fläche von R muß ein Teiler der entsprechenden Anzahl für $z(w)$ sein, die, wie wir wissen, bezüglich gleich 3, 2, 5 sind. *Jede rationale Funktion $R(z)$ einer Ikosaederwurzel und damit jede in der angenommenen Auflösung auftretende Wurzelgröße kann also als Funktion von w betrachtet, wenn überhaupt, so nur an den Punkten $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$ verzweigt sein, und zwar müssen gegebenenfalls bei 0 immer 3 Blätter, bei 1 immer 2 und bei ∞ immer 5 Blätter ihrer Riemannschen Fläche zusammenhängen*, da 3, 2, 5 außer 1 keine anderen Teiler haben.

algebraische Funktion definiert wird. Ich will Ihnen dafür einen *besonders anschaulichen Beweis* vortragen, den ich neuerdings in Bd. 61 der Mathem. Annalen angegeben habe,[1] und der auf der Betrachtung des uns ja wohlbekannten funktionentheoretischen Aufbaues der Ikosaederfunktion $z(w)$ beruht. Ich brauche dabei aus der Algebra nur folgenden bekannten *Hilfssatz von Abel* vorauszusetzen, dessen Beweis Sie in jedem Lehrbuche der Algebra nachlesen können: *Läßt sich eine algebraische Gleichung durch eine Folge von Wurzelzeichen auflösen, so ist jede auftretende Wurzelgröße als rationale Funktion sämtlicher n Wurzeln der Ausgangsgleichung darstellbar.*

Wenden wir das nun speziell auf die Ikosaedergleichung an! *Angenommen, ihre Wurzel z sei durch eine Folge von Wurzelzeichen aus den Gleichungskoeffizienten, d. h. aus rationalen Funktionen von w darstellbar* – wir wollen zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt –, *so ist also jede auftretende Wurzelgröße gleich einer rationalen Funktion der 60 Wurzeln:*

$$R(z_1, z_2 \ldots z_{60}).$$

1.) pag. 369–371: „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen."

malgleichungen denn überhaupt algebraisch etwas wesentlich Neues, und lassen sie sich nicht aufeinander oder insbesondere auf eine Folge reiner Gleichungen zurückführen? Mit andern Worten: Kann man die Lösung z der Gleichungen etwa durch eine endliche Anzahl übereinandergestellter Wurzelzeichen aus w aufbauen?

Was nun zunächst die Gleichungen des Dieders, Tetraeders, Oktaeders anlangt, so läßt die algebraische Theorie in der Tat leicht erkennen, daß man sie auf reine Gleichungen reduzieren kann. Es mag genügen, wenn ich das hier nur für die Diedergleichung ausführe:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Setzt man nämlich

$$z^n = \zeta,$$

so geht die Gleichung über in

$$\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0;$$

hieraus folgt sofort

$$\zeta = w \pm \sqrt{w^2-1}, \text{ und daher}$$
$$z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2-1}},$$

womit die gewünschte Lösung durch Wurzelzeichen gelungen ist.

Demgegenüber ist für die Ikosaedergleichung eine solche Auflösung durch Wurzelzeichen nicht möglich, so daß durch sie also eine wesentlich neue folgenden Quotienten von ϑ-Funktionen dargestellt:

$$z = -q^{3/5}\frac{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}{\vartheta(\pi\omega, q^5)}.$$

Berücksichtigt man die Unendlichvieldeutigkeit der aus der ersten Gleichung sich ergebenden Funktion $\omega(w)$, so zeigt sich, daß diese Formel zu ein und demselben w in der Tat gerade alle 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung liefert. Natürlich kann man diese bei Verwendung eines bestimmten Wertes von ω auch erhalten, indem man auf den letzten Ausdruck die 60 Ikosaedersubstitutionen anwendet. So ist also z. B.

$$z' = -\frac{1}{z} = q^{-4/5}\frac{\vartheta_1(\pi\omega, q^5)}{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}$$

gleichfalls eine richtige Lösung unserer Gleichung. Auf diese Formel, die Schreibner gelegentlich benutzt, kommt Herr Morgenstern in seiner kürzlich erschienenen Dissertation [1] zu sprechen, und behauptet, meine Formel für z sei demgegenüber falsch, während doch eben aus den Grundeigenschaften der Ikosaedergleichung gerade folgt, daß beide Formeln für z und z' entweder gleichzeitig richtig oder gleichzeitig falsch sein müssen.

7. Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen.

Eine Frage in der Theorie der Normalgleichungen habe ich bisher noch nicht berührt. Bringen unsere Vor-

[1] Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen 5. Grades (Halle 1907). pag. 44. 45.

aber läßt sich eine ganz analoge Lösung durch elliptische Modulfunktionen geben. Obgleich man das nicht mehr zur elementaren Mathematik rechnen kann, will ich doch für das Ikosaeder wenigstens die bezüglichen Formeln angeben; sie stehen nämlich in engster Beziehung zu der Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch elliptische Funktionen, von der in den Lehrbüchern immer andeutungsweise die Rede ist, und über die ich sodann noch einige aufklärende Worte sagen will. Die Ikosaedergleichung hatte die Form (vgl. S. 290)

$$w = \frac{f_{20}(z)^3}{f_{12}(z)^5}.$$

Wir identifizieren nun w mit der absoluten Invariante J aus der Theorie der elliptischen Funktionen und fassen diese als Funktion des Periodenquotienten $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (in Jacobischer Bezeichnung $\frac{iK'}{K}$) auf, d. h. wir setzen:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)};$$

wo g_2 und Δ gewisse eine große Rolle spielende transzendente Formen $(-4)^{\text{ter}}$ bezw. $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension in ω_1 und ω_2 sind. Führen wir noch die allgemein benutzte Abkürzung Jacobis

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

ein, so werden die Wurzeln z der Ikosaedergleichung durch

durch die unglückselige Bezeichnung sowohl als durch die allgemeine Furcht vor den komplexen Zahlen für eine Menge von Mißverständnissen zum mindesten die Möglichkeit geschaffen wird. Mögen meine Worte dazu beitragen, sie wenigstens in Ihren Kreisen zu verhüten!

Orientieren wir uns nun noch in aller Kürze darüber, wie sich die Uniformisierung durch transzendente Funktionen bei den weiteren Normalgleichungen gestaltet. Zunächst die Diedergleichung:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Hier haben wir einfach zu setzen:

$$w = \cos\varphi,$$

damit die Gleichung – wie sich sofort aus der Moivreschen Formel ergibt – identisch befriedigt wird durch

$$z = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Da alle Werte $\varphi + 2k\pi$ und $2k\pi - \varphi$ denselben Wert w ergeben, liefert diese Formel in der Tat zu jedem w $2n$ Wurzeln z, die wir auch schreiben können:

$$z = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1).$$

Bei den Gleichungen des Oktaeders, Tetraeders, Ikosaeders endlich reicht man mit diesen „elementaren" transzendenten Funktionen nicht mehr aus, wohl

Nun wenden wir genau das allgemeine Verfahren von S. 298 f. an: Wir schreiben den Radikanden der Kubikwurzel unter Abtrennung des absoluten Betrages

$$\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right| \left(\frac{q/2}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|} + i\,\frac{\left|\sqrt{-q^2/4 - p^3/27}\right|}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|}\right),$$

und bestimmen φ aus den Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{q/2}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\left|\sqrt{-q^2/4 - p^3/27}\right|}{\left|\sqrt{-p^3/27}\right|}\,;$$

dann wird die Kubikwurzel, da die positive dritte Wurzel aus $\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|$ gleich $\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right|$ ist:

$$\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right| \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

und wir erhalten daher, wenn wir noch berücksichtigen, daß φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist:

$$x_k = \left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right| \cdot \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Das ist aber genau die übliche Form der trigonometrischen Lösung.

Gestatten Sie bei dieser Gelegenheit noch eine Bemerkung über den Ausdruck „casus irreducibilis". Hier ist „irreduzibel" in ganz anderem Sinne gebraucht, als heute üblich, und als wir es in dieser Vorlesung schon öfters gebraucht haben; es soll besagen, daß die Lösung der kubischen Gleichung nicht auf Kubikwurzeln reeller Zahlen zurückführbar ist – was mit der modernen Bedeutung des Wortes nicht das mindeste zu tun hat. Sie sehen, wie gerade auf diesem Gebiete

Demgegenüber möchte ich hier nachdrücklich betonen, daß diese trigonometrische Lösung nichts ist, als die Anwendung des vorhin auseinandergesetzten allgemeinen Verfahrens zur Berechnung der Wurzeln aus komplexen Radikanden. Sie ergibt sich also in naturgemäßester Weise, wenn man die Cardanische Formel bei komplexem Radikanden der Kubikwurzel ebenso zur numerischen Rechnung bequem zurecht macht, wie man es bei reellen auch auf der Schule stets tut. Im einzelnen gestaltet sich das so: Wir nehmen also an

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

wozu insbesondere $p < 0$ nötig ist. Schreiben wir dann die erste in (2) eingehende Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|},$$

so bemerken wir, daß ihr absoluter Betrag (als positive Kubikwurzel aus dem Betrage $\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ des Radikanden) gleich $\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right|$ ist; da aber ihr Produkt mit der zweiten Kubikwurzel gerade gleich $-\frac{p}{3}$ sein soll, so muß diese in jedem Falle ihr konjugiert komplexer Wert sein, und beider Summe – die Lösung der kubischen Gleichung – ist daher einfach gleich ihrem doppelten reellen Teil:

$$x_1, x_2, x_3 = 2\,\Re\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|}\right)$$

einfachsten Falle einer kubischen Gleichung mit durchweg reellen Wurzeln verlangt die Cardanische Formel also das Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl und sodann einer Kubikwurzel aus einer komplexen Größe.

Dieser Durchgang durch das Komplexe mußte den alten Algebraisten zu einer Zeit, wo man noch weit von einer Theorie der komplexen Zahlen entfernt war – 250 Jahre, bevor Gauß die Deutung in der Zahlenebene lehrte! – natürlich als etwas ganz Unmögliches erscheinen. Man sprach vom *Casus irreducibilis* der kubischen Gleichung, und sagte, daß hier eben die Cardanische Formel keine vernünftige, brauchbare Lösung mehr gebe. Und als man später entdeckte, daß man *gerade in diesem Falle die kubische Gleichung in einen einfachen Zusammenhang mit der Winkeldreiteilung bringen könne* und so als Ersatz für die „versagende" Cardanische Formel eine ganz im Reellen verlaufende „*trigonometrische Lösung*" erhielte, da glaubte man etwas ganz Neues, gar nicht mit der alten Formel Zusammenhängendes gefunden zu haben. Auf diesem Standpunkte steht leider heute noch im allgemeinen der elementare Unterricht!

irischen Lösung der Gleichung dritten Grades; darüber schalte ich hier gerne einige Bemerkungen ein. Ist die kubische Gleichung in der reduzierten Form vorgelegt:

$$(1.)\qquad x^3 + px - q = 0,$$

so sagt die Formel des Cardanus bekanntlich aus, daß ihre 3 Wurzeln x_1, x_2, x_3 in folgendem Ausdruck enthalten sind:

$$(2)\qquad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

Da jede Kubikwurzel dreiwertig ist, hat dieser Ausdruck an sich 9 im allgemeinen verschiedene Werte; darunter sind x_1, x_2, x_3 dadurch bestimmt, daß das Produkt der beiden in ihnen verwendeten Kubikwurzeln $-\frac{p}{3}$ ist. Ersetzt man nun die Gleichungskoeffizienten p, q in bekannter Weise durch ihre Ausdrücke als symmetrische Funktionen von x_1, x_2, x_3, und berücksichtigt, daß der Koeffizient von x^2 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist, so erhält man:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2}{108},$$

d. h. der Radikand der Quadratwurzel ist bis auf einen negativen Faktor gleich der Diskriminante der Gleichung. Hieraus ergibt sich sofort, daß er negativ ist, wenn alle 3 Wurzeln reell sind, positiv jedoch nur, wenn eine Wurzel reell und die beiden andern konjugiert komplex sind. Gerade in dem anscheinend so hat der erste Faktor als positive reelle Zahl einen reellen, der zweite als Größe vom absoluten Betrage 1 bekanntlich einen *rein imaginären Logarithmus* $i \cdot \varphi$, und zwar ergibt sich φ aus

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \cos\varphi \qquad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \sin\varphi .$$

Wir erhalten also $x = \log w = \log|\sqrt{u^2+v^2}| + i\,\varphi$, und daher als Wurzel der Gleichung

$$z = e^{\frac{x}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log|\sqrt{u^2+v^2}|}\, e^{\frac{1}{n}\varphi i} = e^{\frac{1}{n}\log|\sqrt{u^2+v^2}|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right).$$

Da φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, liefert diese Formel auch alle n Wurzelwerte. Man kann nun mit Hilfe der gewöhnlichen logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zunächst φ aus seinem bekannten Sinus und Cosinus und sodann nach der letzten Formel z bestimmen. Wir haben diese „*trigonometrische Lösung*" hier *auf ganz natürlichem Wege von den Logarithmen komplexer Zahlen aus* erhalten; steht man aber auf dem Standpunkte, daß es solche nicht gibt, und will doch diese trigonometrische Lösung ableiten — auf der Schule schlägt man diesen Weg ein —, so muß sie als etwas ganz Fremdartiges und Unverständliches erscheinen.

Nun ergibt sich besonders *an einer Stelle des Schulunterrichts die Notwendigkeit, Wurzeln aus nicht-reellen Zahlen zu ziehen*, und zwar bei der sog. *Carda-*

berechnet, indem man sie in der Gestalt $z = e^{\frac{\log r}{n}}$ schreibt, unter log r den positiven Hauptwert verstanden; die Logarithmentafel ergibt zuerst diesen Wert, dann in umgekehrter Richtung z als „Numerus" zu $\frac{\log r}{n}$; übrigens benutzt man bekanntlich statt e gewöhnlich 10 als Basis. Diese Lösung überträgt sich allgemein sofort auch auf komplexe Werte: Man befriedigt die Gleichung

$$z^n = w,$$

indem man x gleich dem allgemeinen komplexen Logarithmus log w setzt, wobei man dann hat:

$$w = e^x \qquad z = e^{\frac{x}{n}}.$$

Hierbei kommen in Anbetracht der Vieldeutigkeit von $x = \log w$ – wir werden später noch genauer von dieser Funktion zu reden haben – für dasselbe w in der Tat genau n Werte z heraus. x nennt man die uniformisierende Variable. Nun enthalten unsere Tafeln aber nur die reellen Logarithmen reeller Zahlen, so daß die angegebene Lösung sich unmittelbar numerisch nicht verwerten läßt. Man kann aber mit Hilfe einiger einfacher Eigenschaften des Logarithmus die Berechnung auf die Benutzung der jedem zugänglichen trigonometrischen Tafeln reduzieren. Setzt man nämlich

$$w = u + iv = |\sqrt{u^2+v^2}| \left(\frac{u}{|\sqrt{u^2+v^2}|} + i \frac{v}{|\sqrt{u^2+v^2}|} \right),$$

das systematische Hineinziehen transzendenter Funktionen charakterisiert ist. Man versucht nämlich, statt in jedem Einzelfalle mit Reihenentwicklungen in der Umgebung einer bekannten Lösung vorzugehen, sämtliche der Gleichung genügende Wertepaare w, z ein für alle Male als eindeutige analytische Funktionen einer Hilfsvariablen darzustellen, oder – wie man sagt – die Gleichung zu uniformisieren. Gelingt es nun dabei Funktionen zu verwenden, die man leicht tabulieren kann oder von denen man schon numerische Tafeln besitzt, so kann man dann die numerische Lösung der Gleichung ohne neue Rechenarbeit erhalten. Ich gehe auf dieses Hineinspielen der transzendenten Funktionen um so lieber ein, als es in einigen Fällen in den Schulunterricht hineinspielt und dort häufig noch einen unklaren, fast mysteriösen Anstrich behält; der Grund dafür liegt darin, daß man noch immer an altüberlieferten, unvollkommenen Auffassungen auch da haftet, wo die moderne Funktionentheorie komplexer Variabler längst Klarheit geschaffen hat.

Ich will diese allgemeinen Andeutungen nun zunächst wieder an der reinen Gleichung näher ausführen. Sie wissen, daß man schon auf der Schule die positive Lösung von $z^n = r$ für positives reelles r stets logarithmisch was man durch weitere Verengerung des Netzes jedenfalls bewirken kann. — Dies Verfahren empfiehlt sich in der That sehr zur wirklichen Ausführung der numerischen Wurzelberechnung.

Nun ist das Bemerkenswerte, daß sich die numerische Auflösung der weiteren Normalgleichungen der regulären Körper durchaus nicht wesentlich schwieriger gestaltet, wie ich freilich hier nur als Thatsache berichten will. Wendet man nämlich genau das eben auseinandergesetzte Verfahren auf unsere Normalgleichungen an, indem man von der Abbildung zweier benachbarter Dreiecke auf die w-Kugel ausgeht, so treten an Stelle der binomischen Reihe andere Reihen auf, die jedoch in der Analysis gleichfalls wohlbekannt und dem Gebrauche leicht zugänglich sind: nämlich die hypergeometrischen Reihen. Ich habe selbst im Jahre 1877 in einer Arbeit in Bd. XII der mathem. Annalen („Weitere Untersuchungen über die Theorie des Ikosaeders", pag. 515 ff.) die hier in Betracht kommenden Reihen numerisch aufgestellt.

6. Uniformisierung der Normalgleichungen durch transzendente Funktionen.

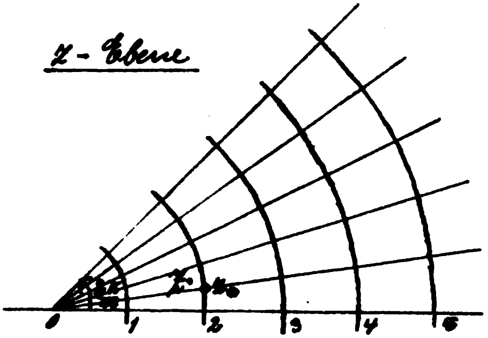
Ich will nun noch auf eine andere Methode zur Lösung unserer Normalgleichungen eingehen, die durch und es sei w_0 dessen w zunächst liegende Ecke. Einen Wert z_0 von $\sqrt[n]{w_0}$ kennen wir als eine Ecke des Ausgangsnetzes in der z-Ebene; wir setzen dann für den gesuchten Wurzelwert

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{w_0+(w-w_0)} = \sqrt[n]{w_0}\,\sqrt[n]{1+\frac{w-w_0}{w_0}} = z_0\left(1+\frac{w-w_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Die rechte Seite entwickeln wir nun nach dem binomischen Satze, den wir ruhig als bekannt ansehen dürfen, da wir uns ja ohnehin im Grunde im Gebiet der Analysis befinden:

$$z = z_0\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{w-w_0}{w_0}+\frac{1-n}{2n^2}\cdot\left(\frac{w-w_0}{w_0}\right)^2+\dots\right)$$

Über die Konvergenz dieser Reihe können wir sofort entscheiden, wenn wir sie als Taylorsche Entwicklung der analytischen Funktion $\sqrt[n]{w}$ betrachten, und den Satz anwenden, daß diese in dem Kreise um w_0 durch den nächsten singulären Punkt konvergiert. Da $\sqrt[n]{w}$ nur 0 und ∞ zu singulären Punkten hat, ist also unsere Entwicklung dann und nur dann konvergent, wenn w innerhalb des Kreises um w_0 durch den Nullpunkt liegt, und das können wir jedenfalls erreichen, indem wir ev. in der z-Ebene von einem ähnlichen Netze mit engeren Maschen ausgehen. Damit aber die Konvergenz auch wirklich gut, d. h. die Reihe zur numerischen Berechnung brauchbar sei, muß noch obendrein $\frac{w-w_0}{w_0}$ klein genug sein,



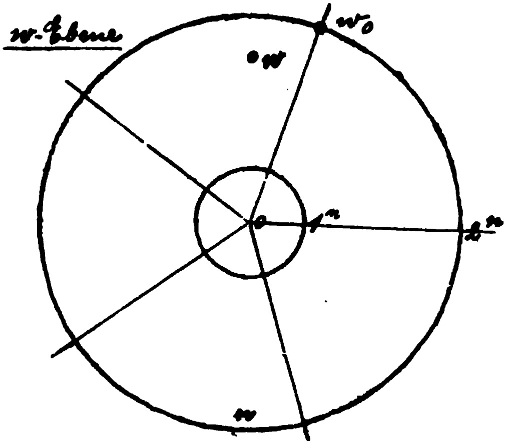
<u>innerhalb des an die reelle Achse angetragenen Winkelraumes $\frac{2\pi}{n}$</u> liegt. Wir beginnen zunächst in genauer Verallgemeinerung der vorhin angedeuteten elementaren Methode – damit, daß wir diesen Winkelraum in etwa ν gleiche Teile teilen (in der Figur $\nu = 5$) und die Teilungsgeraden mit den Kreisen um den Nullpunkt mit ganzzahligen Radien $r = 1, 2, 3 \ldots$ schneiden. So werden bei einmal fest gewähltem ν innerhalb des Winkelraumes alle Punkte

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{k}{\nu}} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2 \ldots \nu \\ r = 1, 2, 3 \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

markiert, an denen wir die entsprechenden w-Werte

$$w = z^n = r^n \cdot e^{2i\pi \frac{k}{\nu}}$$

sofort in der w-Ebene angeben können. Sie bilden dort die Ecken eines ähnlichen, aber die <u>ganze</u> w-Ebene



bedeckenden Netzes, das aus den Kreisen mit den Radien $1^n, 2^n, 3^n \ldots$ sowie den gegen die reelle Achse um $0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu} \ldots \frac{(\nu-1)2\pi}{\nu}$ geneigten Strahlen besteht. Der gegebene Wert w muß nun in irgend einer Masche dieses Netzes liegen, licher Prozesse erheischt, um die im allgemeinen irrationalen Wurzelwerte mit beliebiger Annäherung darzustellen.

Ausführlicheres will ich hier nur über das allereinfachste Beispiel, die reine Gleichung

$$w = z^n$$

sagen, wobei ich wieder in direkten Kontakt mit der Schulmathematik komme; denn auch da wird diese Frage – die Berechnung von $\sqrt[n]{w}$ – wenigstens für die ersten Werte von n und für positive reelle Werte von $w = r$ traktiert. Die Methode zur Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzel, wie sie Ihnen allen von der Schule her geläufig ist, beruht im Grunde auf folgendem: Man untersucht, welchen Platz in der Reihe der Quadrate bezw. Kuben der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3 … der Radikand $w = r$ hat, macht dann im Anschluss an die dezimale Schreibweise dieselbe Probe mit den Zehnteln des betr. Intervalles, dann mit den Hunderteln und fährt so fort, wobei man natürlich eine beliebige Genauigkeit erreichen kann.

Wir wollen hier ein rationelleres Verfahren anwenden, bei dem wir außer beliebigem ganzzahligen n auch beliebige komplexe Werte von w zulassen. Da wir nur eine Lösung der Gleichung zu bestimmen brauchen, wollen wir speziell den Wert $z = \sqrt[n]{w}$ aufsuchen, der

Berechnung der Wurzeln vorangehen muß: die Aufgabe nämlich, getrennte Intervalle anzugeben, in denen sicher immer nur 1 Wurzel liegt. – Wir können aber auch weiterhin sofort angeben, wieviele der 60 Wurzeln reell sind. Berücksichtigen wir nämlich, daß bei der oben angegebenen Form der Ikosaedergleichung das Ikosaeder so in die z-Kugel gelegt gedacht ist,*) daß der reelle Meridian über je 4 Ecken jeder Art a, b, c, läuft, so zeigt sich (vgl. Fig. S. 276 und S. 280), daß gerade 4 ausgezogene Dreiecksseiten in den reellen Meridian fallen, so daß es gerade 4 reelle Wurzeln gibt. Dasselbe gilt, wenn w in einen der anderen beiden Segmente des reellen w-Meridians fällt, so daß überhaupt für jedes reelle w die Ikosaedergleichung 4 reelle und 56 imaginäre Wurzeln hat.

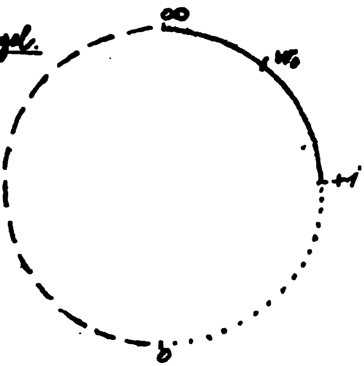
Ich will jetzt einiges über die wirkliche numerische Berechnung der Wurzeln unserer Normalgleichungen sagen. Vor allem kommt uns da natürlich wieder zu Gute, daß wir immer nur 1 Wurzel der Gleichung zu berechnen brauchen, während die anderen durch die linearen Substitutionen folgen. Übrigens mache ich darauf aufmerksam, daß die numerische Berechnung einer Wurzel eigentlich ein Problem der Analysis, nicht der Algebra ist, da sie notwendig die Anwendung unend-

*) vgl. Ikosaeder, pag. 55.

Zunächst weise ich darauf hin, daß die äußerst einfache Natur aller unserer Normalgleichungen darin begründet ist, daß sie genau so viele lineare Substitutionen in sich besitzen, als ihr Grad beträgt, d. h. daß alle ihre Wurzeln lineare Funktionen einer einzigen von ihnen sind, und daß wir ferner in den Kugelteilungen ein äußerst anschauliches geometrisches Bild aller in Betracht kommenden Verhältnisse haben. Wie einfach sich dadurch vieles, was sonst bei Gleichungen so hohen Grades äußerst kompliziert liegt, gestaltet, will ich hier an einer bestimmten Fragestellung für die Ikosaedergleichung zeigen.

Es sei ein reeller Wert w_0 gegeben, etwa auf dem Segment $(1, \infty)$ des reellen w-Meridians; wir fragen nach den 60 Wurzeln z der Ikosaedergleichung für $w = w_0$. Unsere Theorie der Abbildung ergibt sofort, daß je eine von ihnen auf einer der 60 entsprechenden (in der Fig. von S. 280 ausgezogenen) Dreiecksseiten der z-Kugelteilung liegen muß. Damit ist bereits das erledigt, was man in der Gleichungstheorie Separation der Wurzeln nennt und was meist eine sehr mühevolle Arbeit ist, die den umständlichen

w-Kugel.



genau dem gleichen Gedankengange vor sich; ich gebe hier nur die Resultate an, die sich wiederum bei möglichst einfacher Lage der Teilung auf der z-Kugel ergeben. Man erhält als Tetraedergleichung 1):

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \{z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4\}^3 : -12\sqrt{-3}\,\{z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)\}^2 : \{z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4\}^3$$

und als Ikosaedergleichung 2)

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \{-(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}\}^3 : -\{(z_1^{30} + z_2^{30}) + 522(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})\}^2 : 1728\{z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})\}^5,$$

d. h. diese Gleichungen bilden die w-Halbkugeln auf die schraffirten und nichtschraffirten Dreiecke der zum Tetraeder bzw. Ikosaeder gehörigen Einteilung der z-Kugel konform ab.

5. Über die Auflösung unserer Normalgleichungen.

Wir wollen nun weiterhin noch etwas von den gemeinsamen Eigenschaften der Gleichungen handeln, die wir bisher als Beispiele der vorab entwickelten allgemeinen Theorie diskutiert hatten, und die wir unter dem Namen Normalgleichungen zusammenfassen wollen. Natürlich kann ich auch hier die Sachlage immer nur an den einfachsten Fällen auseinandersetzen, indem ich für alles Weitergehende auf mein Ikosaederbuch verweise.

1) Ikosaeder. pag. 60. 51. 2) loc. cit. pag. 60. 56.

durchweg reell ist, da er auf den andern dann genau dieselben Werte annehmen muß. – Nun befindet sich unter den Hauptkreisen der Meridian der reellen Zahlen z, und auf diesem ist selbstverständlich der aus (6) zu entnehmende Wert

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\varphi_8^3}{108\,\psi_6^4}$$

reell, da φ und ψ reelle Polynome in z_1 und z_2 sind. Von den Nebenkreisen bevorzugen wir ebenso den einen durch 0 und ∞ gehenden, der mit dem reellen Meridian den Winkel 45^0 bildet und auf dem also z die Werte $z = e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot r$ annimmt, wo r reell von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; auf ihm ist jedenfalls $z^4 = e^{i\pi}\cdot r = -r$ reell, und da nach (5) in φ_8 selbst und in die vierte Potenz von ψ_6 nur die vierten Potenzen von z_1 und z_2 eingehen, so ist nach der zuletzt benutzten Formel wiederum w reell.

Wir stehen damit am Ende unseres Beweisganges: Die Gleichung (6) bildet in der Tat die Halbebenen der z-Kugel bzw. einer über ihr ausgebreiteten Riemannschen Fläche konform auf die zum Oktaeder gehörige Dreiecksteilung der z-Kugel ab, und wir beherrschen daher umgekehrt die durch diese Gleichung gegebene Abhängigkeit zwischen z und w geometrisch so vollkommen, wie in den früheren Beispielen.

Die Behandlung des Tetraeders und Ikosaeders geht nach können, *daß w längs der 3 Dreiecksseiten überhaupt reell bleibt*, so kann man leicht weiter schließen, daß jede Seite auf ein Segment des reellen w-Meridians eindeutig abgebildet wird, und *daß weiterhin das ganze Dreiecksinnere konform und eineindeutig auf die eine Halbkugel bezogen ist*. Sie werden sich diese Schlußkette, bei der vorwiegend die Stetigkeit und Analytizität der abbildenden Funktion w (z) benutzt wird, leicht selbst ausführen können. Ich will hier nur auf den einzigen spezifischen Schritt des Beweises, den Nachweis der Realität von w auf den Dreiecksseiten, eingehen.

Es ist bequemer, bald die Behauptung in der Form zu beweisen, *daß w auf allen die Oktaederteilung hervorrufenden größten Kreisen reell ist*. Das sind nun erstens die 3 aufeinander senkrechten Kreise durch je 4 der 6 Oktaederecken, die den Oktaederkanten entsprechen (*Hauptkreise*, in der Fig. S. 284 ausgezogen), und ferner die 6 den Höhen der Seitendreiecke entsprechenden Kreise, die die Winkel der Hauptkreise halbieren (*Nebenkreise*, in der Fig. gestrichelt). Durch die Oktaedersubstitutionen läßt sich jeder Hauptkreis in jeden andern und ebenso jeder Nebenkreis in jeden andern überführen; es genügt also, zu zeigen, *daß w auf einem Hauptkreise und einem Nebenkreise* nämlich, wie man durch Ausrechnen bestätigen kann, die Identität:

$$\varphi_8^3 - 108\,\psi_6^4 = \chi_{12}^2,$$

so daß die Oktaedergleichung (3) lautet:

$$(6) \qquad w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \varphi_8^3 : \chi_{12}^2 : 108\,\psi_6^4.$$

Diese Gleichung bildet gewiß *die Punkte $w = 0, 1, \infty$ bezüglich auf die Seitenmitten, Kantenmitten, Ecken des Oktaeders mit der richtigen Vielfachheit ab*, da ja die Formen φ, χ, ψ entsprechend gebildet sind; ferner führen sie die 24 Oktaedersubstitutionen (4) in sich über, denn sie transformieren die Nullstellen jeder der Formen φ, χ, ψ in sich, und ändern diese daher nur je um einen multiplikativen Faktor, und die Rechnung ergibt, daß bei der Quotientenbildung diese Faktoren sich gerade wegheben.

Zu zeigen bleibt nur noch, daß die Gleichung wirklich *jedes schraffierte oder nichtschraffierte Dreieck der z-Kugel konform auf die hintere oder vordere w-Halbkugel* abbildet. Wir wissen nun schon, daß den 3 Ecken eines jeden Dreiecks die Punkte $0, 1, \infty$ des reellen w-Meridians entsprechen, und ferner, daß innerhalb eines Dreiecks w einen und denselben Wert höchstens einmal annimmt, da die Gleichung für dieses w nur 24 Wurzeln hat, die sich auf die 24 gleichartigen Dreiecke verteilen müssen. Würden wir nun noch zeigen

$z = 0$ gibt den Faktor z_1, $z = \infty$ den Faktor z_2; an den 4 Stellen ± 1 und $\pm i$ verschwindet die Form $z_1^4 - z_2^4$ einfach, so daß wir schließlich erhalten:

$$(5^a) \qquad \psi_6 = z_1 \cdot z_2 \, (z_1^4 - z_2^4).$$

Schwieriger ist die Bildung der Formen φ_8 und χ_{12}, die die Mitten der Seitenflächen bezw. die Kantenhalbierungspunkte zu einfachen Nullstellen haben; ich gebe sie hier ohne Ableitung an [1]:

$$(5^b) \qquad \begin{cases} \varphi_8 = z_1^8 + 14\, z_1^4 z_2^4 + z_2^8 \\ \chi_{12} = z_1^{12} - 33\, z_1^8 z_2^4 - 33\, z_1^4 z_2^8 + z_2^{12}. \end{cases}$$

Übrigens bleibt natürlich in allen diesen 3 Formen ein konstanter Multiplikator unbestimmt. Bedeuten φ_8, ψ_6, χ_{12} die Formen genau in der Normierung (5), so müssen wir daher in die Oktaedergleichung (3) noch unbestimmte Konstante c_1, c_2 hineinnehmen und sie schreiben:

$$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \varphi_8^3 : c_1 \chi_{12}^2 : c_2 \cdot \psi_6^4.$$

Wir müssen noch die c so bestimmen, daß diese zwei Gleichungen tatsächlich nur <u>eine</u> Gleichung zwischen z und w darstellen, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$\varphi_8^3 - c_2 \psi_6^4 = c_1 \chi_{12}$$

identisch in z_1, z_2 gilt. Nun läßt sich diese Relation <u>in der Tat</u> durch Konstante c_1, c_2 erfüllen; es besteht

1) vgl. Ikosaeder, pag. 54.

fachen Gestalt angeben: Wir beginnen mit den 4 Drehungen, bei denen die Ecken 0 und ∞ fest bleiben:

$$(4^a) \qquad z' = i^k \cdot z \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Weiter können wir, etwa durch die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ (d. i. eine Drehung um die horizontale Achse $(+1, -1)$ durch 180°) den Punkt 0 nach ∞ bringen; wenden wir sodann noch die 4 Drehungen (4^a) an, so erhalten wir die 4 neuen Substitutionen:

$$(4^b) \qquad z' = \frac{i^k}{z}. \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Ebenso werfen wir nun der Reihe nach jeden der weiteren 4 Eckpunkte $z = 1, i, -1, -i$ durch die Substitutionen $z' = \frac{z+1}{z-1}, \frac{z+i}{z-i}, \frac{z-1}{z+1}, \frac{z-i}{z+i}$ nach ∞ und erhalten, indem wir jedesmal wiederum die 4 Drehungen (4^a) darauf setzen, weitere $4 \cdot 4 = 16$ Substitutionen des Oktaeders:

$$(4^c) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} z' = i^k \cdot \frac{z+1}{z-1} & z' = i^k \cdot \frac{z-1}{z+1} \\ z' = i^k \cdot \frac{z+i}{z-i} & z' = i^k \cdot \frac{z-i}{z+i} \end{array} \right. . \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Damit haben wir sämtliche 24 gesuchten Substitutionen gefunden, und man kann nun auch direkt durch Rechnung bestätigen, einmal daß sie wirklich die 6 Oktaederecken in sich überführen, und dann, daß sie eine Gruppe bilden, d. h. daß die Aufeinanderfolge zweier beliebiger dieser Substitutionen wieder eine Substitution (4) ergibt.

Ich will nun zunächst die Form φ_6 bilden, die in den 6 Oktaederecken einfach verschwindet: der Punkt

$$= (z_1^n + z_2^n)^2 : (z_1^n - z_2^n)^2 : 2(z_1 z_2)^n;$$

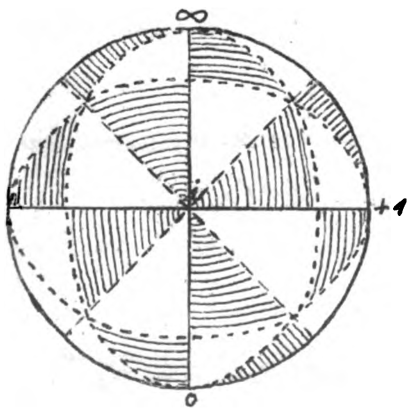
wir können also in der Tat der obigen Tabelle hinzufügen:

Dieder: $\varphi_n^2,\ \chi_n^2,\ \psi_2^n;\quad N = 2n.$

Die aus dieser Form der Gleichung sofort abzulesenden merkwürdigen Punkte samt ihren Vielfachheiten stimmen mit den früher festgestellten (vgl. S. 262) überein.

Wir kommen nun dazu, die Formen φ, χ, ψ in den drei neuen Fällen wirklich zu bilden. Ich will dabei näher nur auf das Oktaeder eingehen, wo sich die Verhältnisse am einfachsten gestalten; auch hier aber werde ich, um im Rahmen eines kurzen Überblickes zu bleiben, manches bloß andeuten und nur Resultate mitteilen können; jedem, der darüber Näheres erfahren will, ist eine ausführliche Darstellung in meinem Buche über das Ikosaeder ja leicht zugänglich. Wir denken uns der Einfachheit halber das Oktaeder so der z-Kugel eingeschrieben, daß die 6 Ecken nach

$$z = 0, \infty, +1, +i, -1, -i$$



fallen. Nun lassen sich die 24 linearen Substitutionen von z, die die Drehungen des Oktaeders darstellen, d. h. die gesamten 6 Punkte miteinander vertauschen, in recht ein-

$$\Psi_\nu = \left(\psi_{N/\nu}(z_1, z_2)\right)^\nu, \text{ wo } \nu = 3, 4 \text{ oder } 5.$$

Unsere Gleichung (2) muß also notwendig die Form haben:

(3) $$w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \varphi(z_1, z_2)^3 : \chi(z_1, z_2)^2 : \psi(z_1, z_2)^\nu,$$

wo die Gradzahlen und Exponenten von φ, χ, ψ und die Werte des Grades N der Gleichung aus folgender kleinen Tabelle hervorgehen:

Tetraeder:	φ_4^3,	χ_6^2,	ψ_4^3;	$N = 12$.
Oktaeder:	φ_8^3,	χ_{12}^2,	ψ_6^4;	$N = 24$.
Ikosaeder:	φ_{20}^3,	χ_{30}^2,	ψ_{12}^5;	$N = 60$.

Nun will ich noch kurz zeigen, daß sich auch die früher behandelte Diedergleichung diesem Schema (3) einreihen läßt. Wir müssen uns bloß erinnern, daß wir damals auf der w-Kugel die 3 Verzweigungsstellen nach $-1, +1, \infty$ statt wie zuletzt nach $0, +1, \infty$ gelegt hatten, so daß wir wirkliche Analogie mit (3) erst erreichen, wenn wir die Diedergleichung in die Form

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_2 = \Phi : X : \Psi$$

zu setzen versuchen. Nun erhalten wir aber aus der früher benutzten Diedergleichung (S. 261)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2 \cdot z_1^n z_2^n}$$

durch eine einfache Umrechnung

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_2 = z_1^{2n} + z_2^{2n} + 2 z_1^n z_2^n : z_1^{2n} + z_2^{2n} - 2 z_1^n z_2^n : 2 z_1^n z_2^n$$

die Mittelpunkte der Polyederflächen (Ecken b. der Teilung) entsprechen, deren es in jedem Falle $\frac{N}{3}$ gibt; in jedem dieser Punkte stoßen aber je 3 auf die einzelnen Halbkugeln einfach abgebildete schraffierte und nichtschraffierte Dreiecke zusammen, so daß er als Wurzel unserer Gleichung dreifach zu rechnen ist. Also liefern diese Punkte mit dieser Vielfachheit die sämtlichen $w = 0$ entsprechenden Stellen und damit die sämtlichen Nullstellen von Φ_N; Φ_N hat also lauter dreifache Nullstellen und muß daher die dritte Potenz einer Form $\varphi(z_1, z_2)$ der Grades $\frac{N}{3}$ sein:

$$\Phi_N = \left(\varphi_{N/3}(z_1, z_2)\right)^3.$$

Genau so folgt nun weiterhin, daß der Stelle $w = 1$ bzw. $w_1 - w_2 = 0$ die Nullstellen von $X_N = 0$ entsprechen, und daß sie identisch sind mit den doppelt gezählten $\frac{N}{2}$ Kantenmittelpunkten des Polyeders (Ecken c. unserer Teilung), also muß X_N ein volles Quadrat einer Form der Dimension $\frac{N}{2}$ sein:

$$X_N = \left(\chi_{N/2}(z_1, z_2)\right)^2.$$

Endlich korrespondieren $w = \infty$ die Nullstellen von Ψ_N und sie müssen daher identisch sein mit den Ecken des Ausgangspolyeders (Ecken a der Teilung); an diesen aber stoßen in den einzelnen Fällen 3, 4 oder 5 Dreiecke zusammen, so daß wir erhalten:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\Phi_\nu(z_1,z_2)}{\Psi_\nu(z_1,z_2)},$$

wo Φ_ν, Ψ_ν homogene Polynome der Dimension ν in z_1, z_2 sind ($\nu = 12$, 24 oder 60). Bei dieser Schreibweise der Gleichung erscheinen die Stellen $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ der w-Kugel ausgezeichnet; da neben ihnen aber für uns stets gleichberechtigt der dritte Verzweigungspunkt $w = 1$ (homogen: $w_1 - w_2 = 0$) in Betracht kommt, erweist es sich als zweckmäßig auch die folgende Form der Gleichung explizit zu berücksichtigen:

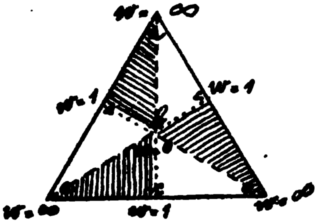
$$\frac{w_1 - w_2}{w_2} = \frac{X_\nu(z_1,z_2)}{\Psi_\nu(z_1,z_2)},$$

wo $X_\nu = \Phi_\nu - \Psi_\nu$ gleichfalls eine Form ν^{ter} Dimension ist. Beide Gestalten fasse ich gern in die stetige Proportion zusammen:

$$(2) \qquad \underline{w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \Phi_\nu(z_1,z_2) : X_\nu(z_1,z_2) : \Psi_\nu(z_1,z_2)};$$

wir haben darin eine die 3 Verzweigungspunkte durchaus gleichmäßig berücksichtigende homogene Form der Gleichung (1).

Unsere Aufgabe ist jetzt, die Formen $\Phi_\nu, X_\nu, \Psi_\nu$ zu bilden, und zu diesem Ende wollen wir sie sogleich in Beziehung zu unserer z-Kugelteilung setzen. Wir entnehmen aus (2) sofort, daß für $w_1 = 0$ $\Phi_\nu(z_1,z_2) = 0$ wird, d. h. der Stelle $w = 0$ entsprechen auf der w-Kugel die ν Nullstellen der Form Φ_ν. Andererseits sollen nach unseren Festsetzungen der Verzweigungsstelle $w = 0$



allen Zahlen.

Wir setzen ferner fest, wie nebenstehend skizziert, daß in jedem der 3 Fälle dem Punkte $w=0$ die Mittelpunkte der Seitenflächen (Ecken b in der früheren Bezeichnung), dem Punkte $w=1$ die Kantenhalbierungspunkte (Ecken c) und dem Punkte $w=\infty$ die Polyederecken (Ecken a) entsprechen. Dann entsprechen die Dreiecksseiten, wie in der Figur angedeutet, den 3 Segmenten des w-Meridians, und die schraffierten Dreiecke entsprechen der hinteren, die nicht schraffierten der vorderen Halbkugel. Die Gleichung (1) soll also nun gemäß diesen Zuordnungen die z-Kugel auf eine über der w-Kugel ausgebreitete N-blättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten bei $0, 1, \infty$ eindeutig abbilden.

Man könnte die Existenz dieser Gleichung aus allgemeinen funktionentheoretischen Theoremen leicht a priori deduzieren, ich will jedoch hier die entsprechenden Kenntnisse nicht voraussetzen und ziehe daher einen mehr empirischen Aufbau der einzelnen Gleichungen vor, der uns vielleicht auch eine lebhaftere Anschauung der Einzelfälle verschafft.

Wir denken uns die Gleichung (1) in homogenen Variablen geschrieben:

der automorphen Funktionen zieht Einteilungen der Kugel in unendlich viele Dreiecke mit einer Winkelsumme kleiner als π in Betracht.

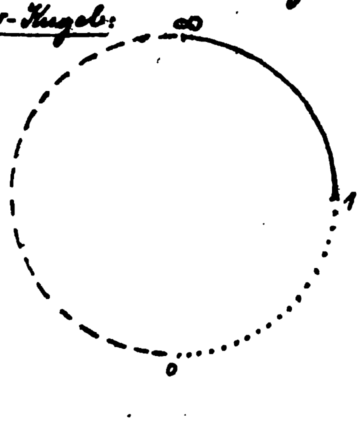
4. Fortsetzung: Aufstellung der Gleichungen.

Wir kommen jetzt zum zweiten Teil unserer Aufgabe, diejenige Gleichung der Form

$$(1) \qquad \varphi(z) - w\,\psi(z) = 0 \quad \text{oder} \quad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

aufzustellen, die zu einer jeden unserer 3 Kugelteilungen gehört, d. h. vermöge deren die beiden Halbkugeln der w-Kugel auf die $2 \cdot 12$ bezw. $2 \cdot 24$ bezw. $2 \cdot 60$ Teildreiecke der z-Kugel abgebildet werden. Jedem Werte w sollen also im allgemeinen 12 bezw. 24 bezw. 60 Werte z – je einer in einem Teildreieck der zugehörigen Art – entsprechen, und daher muß die gesuchte Gleichung in den 3 Fällen die Grade 12, 24, 60 haben, für die wir allgemein N schreiben wollen. Nun stößt jeder Teilbereich an 3 merkwürdige Punkte, also muß es in jedem Falle 3 Verzweigungsstellen auf der w-Kugel geben, und diese legen wir, wie es üblich ist, nach $w = 0, 1, \infty$; als Schnittkurve S durch diese 3 Punkte, deren 3 Segmente den Grenzlinien der z-Dreiecke entsprechen sollen, verwenden wir wieder den Meridian der re-

w-Kugel:



loger Eigenschaften mit Winkeln wie $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ gäbe. Der Mathematiker darf natürlich solche Analogieschlüsse nicht anwenden und seine Vorsicht erweist sich hier als berechtigt, denn in der Tat *bricht die Reihe der möglichen Kugelteilungen unserer Art mit den aufgezählten ab*. Natürlich hängt diese Tatsache genau damit zusammen, *daß es keine weiteren regulären Polyeder gibt*. Wir können ihren letzten Grund in *einer Eigenschaft der ganzen Zahlen* angeben, die eine Reduktion auf einfachere Gründe nicht mehr gestattet. Es zeigt sich nämlich, daß die Winkel eines jeden unserer Dreiecke ganzzahlige Teile von π sein müssen, etwa $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{r}$, derart, daß die Nenner der Ungleichung:

$$\underline{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} > 1}$$

genügen; der Satz ist nun der, daß hierfür nur die oben angegebenen ganzzahligen Lösungen existieren. Diese Ungleichung können wir übrigens leicht verstehen, denn sie drückt nur aus, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer ist als π. –

Ich möchte hier übrigens noch erwähnen, wie gewiß manchem von Ihnen bekannt ist, daß eine *sinngemäße Verallgemeinerung* der Theorie doch über diesen scheinbar zu engen Rahmen hinausführt: *Die Theorie* liegen je 3 Dreiecke jeder Art.

c) die 30 Kantenmittelpunkte, wo je 2 Dreiecke jeder Art zusammenstoßen.

Auf die Kugel übertragen erhält daher jedes Dreieck an den Ecken a, b, c die Winkel $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Aus der Eigenschaft der Ecken b kann man wieder schließen, daß dieselbe Figur aus dem regulären Dodekaeder hervorgehen würde. Endlich wird das Ikosaeder und die zugehörige Kugelteilung durch eine Gruppe G_{60} von 60 Drehungen der Kugel um den Mittelpunkt in sich übergeführt. Auch diese Drehungen wie die des Oktaeders mögen Sie sich an einem Modelle, wie ich es Ihnen hier zeige, recht klar machen.

Ich stelle noch einmal, meine Herren, die Winkel der sphärischen Dreiecke zusammen, die sich in den 3 betrachteten Fällen ergeben haben, und füge auch das Dieder hinzu:

Dieder: $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Tetraeder: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

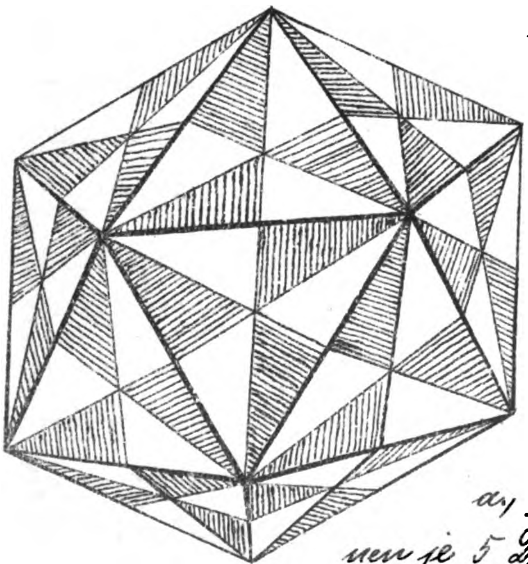
Oktaeder: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Ikosaeder: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Der Naturwissenschaftler – ich wende hier ein bekanntes Scherzwort von Kummer an – würde danach sogleich schließen, daß es auch weiterhin Kugelteilungen ana-

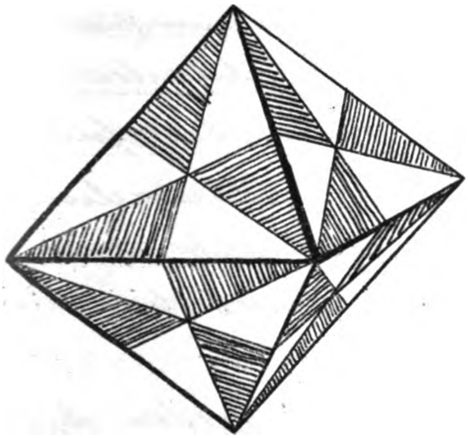
Genau wie vorhin macht man sich nun klar, daß das Oktaeder sowohl, wie diese Gebietseinteilung der Kugel durch 24 Drehungen in sich übergeführt wird, die eine Gruppe G_{24} bilden; jede einzelne Drehung ist wieder dadurch bestimmt, daß sie ein vorgegebenes schraffiertes Dreieck in ein bestimmtes anderes überführt.

3) Wir kommen endlich zum Ikosaeder. Auch hier haben wir dieselbe Einteilung jedes der 20 Seitendreiecke zu Grunde zu legen und erhalten im ganzen 60 schraffierte und 60 nichtschraffierte Teildreiecke. Die 3 Arten von Ecken sind:



a) die 12 Ikosaederecken, an denen je 5 Dreiecke jeder Art liegen.

b) die 20 Seitenmittelpunkte, die die Ecken eines regulären Pentagondodekaeders bilden; an ihnen



ente, den erstern aber spiegelbildlich symmetrische nicht schraffierte Dreiecke. Wiederum können wir 3 Arten von Ecken unterscheiden:

a.) die 6 Oktaederecken, an denen je 4 Dreiecke jeder Art zusammenstoßen.

b.) die 8 Mittelpunkte der Seiten, die die Ecken eines Würfels bilden; an ihnen stoßen je 3 Dreiecke jeder Art zusammen.

c.) die 12 Mittelpunkte der Kanten, an denen je 2 Dreiecke jeder Art liegen.

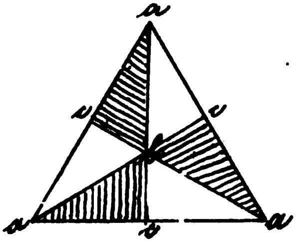
Gehen wir durch zentrale Projektion auf die umschriebene Kugel über, so erhalten wir eine Einteilung in $2 \cdot 24$ kongruente bezw. symmetrische sphärische Dreiecke, deren jeder die Winkel $\frac{\pi}{4}$ an der Ecke a, $\frac{\pi}{3}$ an der Ecke b und $\frac{\pi}{2}$ an der Ecke c besitzt. Da die Ecken b einen Würfel bilden, überzeugt man sich leicht, daß man genau dieselbe Einteilung erhalten würde, wenn man von einem Würfel ausginge und seine Ecken, Seiten- und Kantenmitten auf die Kugel projizierte; wir brauchen also den Würfel in der Tat nicht besonders zu berücksichtigen.

Kugel in sich überführen. Durch diese Drehungen kann man ein einmal vorgegebenes schraffiertes (oder nichtschraffiertes) Dreieck in jedes andere schraffierte (bzw. nichtschraffierte) Dreieck überführen, und die einzelne Drehung ist bestimmt, wenn man auch dieses letztere gibt. – Diese 12 Drehungen bilden offenbar das, was man eine Gruppe G_{12} nennt, d. h. wenn man zwei von ihnen nacheinander vornimmt, resultiert wiederum eine der 12 Drehungen.

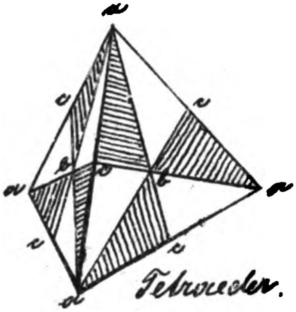
Jede dieser 12 Drehungen wird, wenn wir die Kugel als z-Kugel auffassen, durch eine lineare Transformation der z dargestellt, und die so entstehenden 12 linearen Transformationen werden die dem Oktaeder zugehörige Gleichung in sich überführen. Ich bemerke zum Vergleich, daß man, wie Sie sich überzeugen mögen, die $2n$ linearen Substitutionen der Diedergleichung als Gesamtheit der Drehungen des Dieders in sich deuten kann.

2.) Wir wollen jetzt das Oktaeder ähnlich behandeln und können uns dabei etwas kürzer fassen. Wir teilen jedes der 8 Seitendreiecke genau wie vorhin in 6 Teildreiecke und erhalten eine Teilung der ganzen Oktaederoberfläche in 24 einander kongruente schraffierte und 24 wiederum untereinander kongruum einen Punkt herum jedenfalls 2π beträgt, *hat jedes unserer sphärischen Dreiecke den Winkel $\frac{\pi}{3}$ an einer Ecke a. und b. sowie $\frac{\pi}{2}$ an einer Ecke c.*

Eine *charakteristische Eigenschaft dieser Kugelteilung* ist, *daß sie – ebenso wie das Tetraeder selbst – durch eine Anzahl von Drehungen um dessen Mittelpunkt in sich selbst übergeführt wird.* Sie können sich dies an einem Modelle des Tetraeders mit seiner Teilung, wie ich es Ihnen aus unserer Sammlung hier vorführe, leicht im einzelnen klar machen; für den Vortrag mag es genügen, wenn ich die *Anzahl der möglichen Drehungen* abzähle, wobei die Ruhe als „*identische Drehung*" stets mitgerechnet wird. Fassen wir eine bestimmte Ecke des Ausgangstetraeders ins Auge, so können wir sie durch eine Drehung in jede Tetraederecke (auch in sich selbst) überführen, was 4 Möglichkeiten ergibt; halten wir sie aber in einer dieser Lagen fest, so können wir das Tetraeder noch auf 3 verschiedene Arten mit sich selbst zur Deckung bringen, indem wir nämlich um die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit jener festen Ecke als Achse durch einen Winkel von 0°, 120° oder 240° drehen. Das gibt *im ganzen 4 · 3 = 12 Drehungen*, die das Tetraeder oder die entsprechende Dreiecksteilung der umschriebenen



Seitendreieck in natürl. Größe.



Tetraeder.

wiederum kongruente, der ersteren aber spiegelbildlich gleiche Dreiecke; die eine Gruppe von Dreiecken mögen wir durch Schraffierung auszeichnen. Was die Ecken dieser Dreiecke angeht, so können wir 3 Arten unterscheiden, so daß jedes Dreieck je eine Ecke jeder Art hat:

a.) die 4 Ecken des Ausgangstetraeders, an denen je 3 schraffierte und 3 nichtschraffierte Dreiecke zusammenstoßen.

b.) die 4 Mittelpunkte der Seitenflächen, die wiederum ein reguläres Tetraeder (das Gegentetraeder) bilden; an ihnen stoßen je 3 Dreiecke jeder Art zusammen.

c.) die 6 Halbierungspunkte der Kanten, die ein reguläres Oktaeder bilden; an ihnen stoßen je 2 Dreiecke jeder der beiden Arten zusammen.

Projizieren wir diese Dreiecksteilung vom Mittelpunkt aus auf die umgeschriebene Kugel, so wird diese in 2.12 von größten Kreisen begrenzte Dreiecke geteilt, die wechselweise kongruent bezw. symmetrisch sind. Um jede Ecke der Art a.) b.) c.) liegen bezüglich 6, 6, 4 gleiche Winkel herum, und da die Summe der Winkel auf der Kugeloberfläche *dergleichung* bezeichnen könnten, so daß in der Tat alle 5 Körper untergebracht sind. Wir wollen hier den umgekehrten Weg einschlagen wie im vorigen Beispiele: *Wir leiten zuerst, von dem regulären Körper ausgehend, eine Gebietseinteilung der Kugel her und stellen alsdann die zugehörige algebraische Gleichung auf, die in jener Figur ihre geometrische Veranschaulichung findet.* Ich werde mich dabei aber vielfach auf Andeutungen beschränken müssen, und verweise deshalb gleich zu Anfang auf mein Buch: „*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*"[1], in dem Sie die ganze umfangreiche Theorie mit allen ihren Beziehungen systematisch dargestellt finden.

Ich will übrigens alle drei Fälle parallel behandeln und beginne mit der *Herleitung der Feldereinteilung der Kugel für*

1.) *das Tetraeder.* Wir teilen jedes der 4 gleichseitigen Seitendreiecke des Tetraeders durch die 3 Höhen in *6 Teildreiecke*, von denen je 3 einander kongruent sind, während 2 nicht kongruente spiegelbildlich symmetrisch sind. Wir erhalten so eine *Einteilung der ganzen Tetraederoberfläche in 12 einander kongruente und 12*

1.) Leipzig 1884; weiterhin zitiert als „Ikosaeder".

durch die man ein reguläres Polyeder gewöhnlich definiert, indem es lauter kongruente Kanten (die Kanten des n-Ecks) und lauter kongruente Ecken (seine Ecken) besitzt – der einzige Unterschied ist, daß es keinen eigentlichen Körper begrenzt, sondern den Rauminhalt 0 umschließt. So ist also der Platosche Satz, daß es nur 5 reguläre Polyeder gibt, nur dann richtig, wenn man die in Beweise natürlich stets stillschweigend benutzte Forderung eines *eigentlichen* Körpers auch in die Definition aufnimmt.

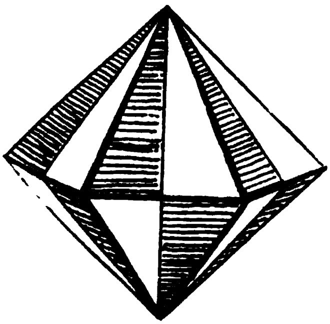
Vom Dieder ausgehend erhält man offenbar unsere Kugelteilung, indem man außer seinen Ecken auch die Mittelpunkte seiner Kanten und Seitenflächen auf die Kugel projiziert; es kann daher *gleichfalls als Repräsentant der durch unsere Gleichung gegebenen Funktionsbeziehung zwischen w und z angesehen* werden, so daß wir diese Gleichung, wie schon angekündigt, passend als *Diedergleichung* bezeichnen können.

Wir kommen zu den bereits angedeuteten Beispielen, die in engster Beziehung zu den Platonischen regulären Körpern stehen, und die wir als

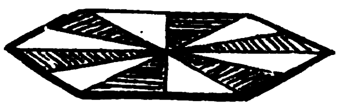
3. Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergleichung

bezeichnen; wir werden sehen, daß wir die beiden letzten mit dem gleichen Rechte auch als *Würfel- und Dodekaeder-*

Kugelteilung erreicht man so: Man verbindet geradlinig immer 2 benachbarte um $\frac{2\pi}{n}$ abstehende Teilpunkte auf dem Aequator mit einander (etwa alle ε^ν), und ferner jeden von ihnen mit jedem der beiden Pole. So entsteht eine der Kugel eingeschriebene Doppelpyramide mit n (im Beispiele der Figur 6) Seitenflächen auf jedem Mantel: Projiziert man die Kugelteilung vom Zentrum aus auf sie, so



erscheint jedes Seitendreieck durch seine Höhe in eine schraffierte und eine nicht schraffierte Hälfte geteilt. Repräsentieren wir durch diese Doppelpyramide die Kugelteilung und damit unsere Funktion, so leistet sie uns ganz ähnliche Dienste, wie es in den folgenden Beispielen die regulären Polyeder tun werden. Wir erreichen vollständige Analogie mit diesen, wenn wir uns die Doppelpyramide in ihre Grundfläche zusammengedrückt denken, und das entstehende doppelt bedeckte reguläre n-Eck (Sechseck) betrachten, dessen beide Seiten durch die Verbindungslinien



ihres Mittelpunktes mit den Ecken und Mitten der Kanten in je 2n Dreiecke geteilt sind. Ich habe dieses Gebilde immer gerade als Dieder den bekannten 5 regulären Polyedern, die man seit Plato kennt, angereiht; es erfüllt nämlich alle Bedingungen, gestrichelten, einer punktierten Kurve besteht; wegen der Konformität der Abbildung haben wir daher alle Halbbereiche, bei denen die drei Teile der Begrenzung im selben Sinne aufeinander folgen, zu schraffieren, alle andern freizulassen.

Damit haben wir das vollständige geometrische Bild der durch unsere Gleichung repräsentierten Abhängigkeit zwischen z und w erhalten; man kann es noch weiter ausführen, indem man die konforme Abbildung des einzelnen Dreiecksbereiches auf die w-Halbkugel näher untersucht, was wir uns hier indessen wieder sparen wollen. Ich beschreibe nur noch resümierend den vorzugsweise berücksichtigten Fall $n = 6$: Die Kugel ist da in 12 schraffierte und 12 nichtschraffierte Dreiecke geteilt, von denen in unserer Figur je 6 zu sehen sind. An jedem Pole stoßen je 6 von jeder Art, an 12 aequidistanten Punkten des Aequators je 2 zusammen; jeder Bereich ist auf ein gleichartiges Halbblatt der Riemannschen Fläche konform abgebildet, die entsprechend der Gruppierung der Halbbereiche zu je 6 von jeder Art über der Verzweigungsstelle ∞ und zu je zwei von jeder Art über den Verzweigungsstellen ± 1 zusammenhängen.

Ein bequem zu handhabendes und wegen der Analogie mit dem folgenden besonders wertvolles Bild der

Es bleiben noch die dem gestrichelten Halbmeridian $-1 < w < +1$ entsprechenden $2n$ Kurvenstücke zu suchen; ich beweise, daß es gerade die von den Punkten ε^ν und $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ auf dem Aequator der z-Kugel hervorgerufenen Abschnitte sind. In der Tat repräsentiert der Aequator die Punkte vom absoluten Betrage 1 und wird daher durch $z = e^{i\varphi}$ dargestellt, wo φ reell von 0 bis 2π läuft. Daher ist das zugehörige

$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}\right) = \cos(n\varphi);$$

das bleibt in der Tat stets reell und absolut unter 1, und zwar nimmt es gerade einmal alle Werte zwischen $+1$ und -1 an, wenn φ einen Bogen von der Länge $\frac{\pi}{n}$ durchläuft – d.h. einen der Abschnitte, von denen wir sprechen.

Die so bestimmten Kurven zerlegen die z-Kugel in $2 \cdot 2n$ – übrigens dreiecksförmige – Halbbereiche, die von je einer Kurve der 3 Arten begrenzt werden und je einem Halbblatt der Riemannschen Fläche entsprechen; nur an einem merkwürdigen Punkte stoßen mehrere Bereiche zusammen und zwar, wie es nach der Tabelle der Vielfachheiten (S. 263) sein muß, am Nord- und Südpol je $2 \cdot n$, an jedem Punkte ε^ν und $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ je $2 \cdot 2$. Um festzustellen, welche von diesen Bereichen zu schraffieren sind, bemerken wir, daß die Begrenzung der hinteren w-Halbkugel positiv durchlaufen aus einer ausgezogenen, einer von +1 nach 0 über. Unterwerfen wir auch diesen allen n Drehungen (2^{ν}) – die Zusammensetzung dieser mit $z' = \frac{1}{z}$ gibt in der Tat alle Substitutionen $(2'^{\nu})$ – so treten noch die n den Südpol mit den Aequatorialpunkten ε^{ν} verbindenden Viertelmeridiane hinzu, womit wir in der Tat die gewünschten $2n$ ausgezogenen dem ausgezogenen w-Meridianquadranten entsprechenden Kurven haben. Für $n = 6$ speziell erfüllen sie die 3 ganzen Meridiane, die aus dem reellen Meridian durch die Drehungen um $0°$, $60°$, $120°$ hervorgehen.

Nun können wir weiter einsehen, daß die Gesamtheit der Werte $z = \varepsilon' \cdot r$, wo r wieder reell von $+1$ bis ∞ läuft, dem punktierten Teile des reellen w-Meridians entspricht; denn die Gleichung (1) liefert dafür

$$w = (\varepsilon')^{n} \frac{1}{2}\left(r^{n} + \frac{1}{r^{n}}\right) = -\frac{1}{2}\left(r^{n} + \frac{1}{r^{n}}\right),$$

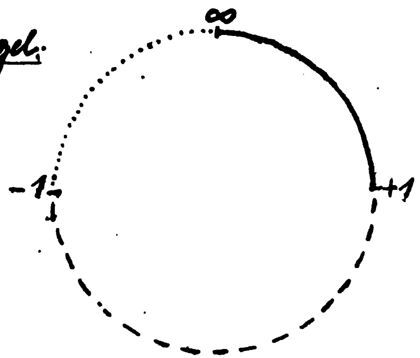
und das läuft wirklich stets abnehmend von -1 bis $-\infty$. Nun stellt $z = \varepsilon' \cdot r$ aber den Meridianquadranten von ∞ nach dem Aequatorialpunkt ε' dar, und wenn wir auf diesen wiederum die Substitutionen (2^{ν}), $(2'^{\nu})$ anwenden, so ergeben sich genau wie vorhin als dem punktierten Teile des reellen w-Meridians entsprechend die sämtlichen Meridianquadranten von den Polen nach den Aequatorialpunkten ε', ε^{ν}, die also die Winkel der vorhin verwendeten Meridiane halbieren.

etwas verschiedenen Typus, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es mag hier genügen, wenn wir nur einen bestimmten Fall, etwa $n = 6$, vor Augen stellen; die Figur stellt in orthogonaler Projektion die Vorderseite der z-Kugel dar, und es sind von den auf dem Aequator in Abständen von je $60°$ aequidistant liegenden Punkten ε^ν von links an $\varepsilon^3 = -1$, ε^4, ε^5, $\varepsilon^6 = 1$, von den in der Mitte zwischen ihnen liegenden $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^\nu$ aber $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varepsilon^3$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4 = -i$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^5$ sichtbar.

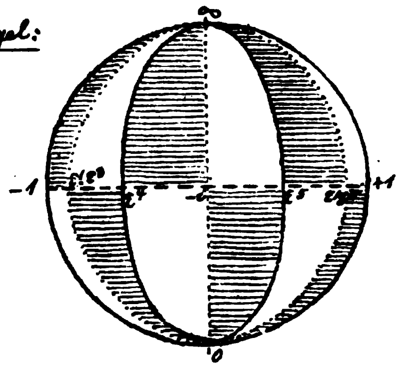
Ich behaupte nun, daß der Quadrant $(+1, \infty)$ des reellen z-Meridians dem ausgezogenen Teile $+1 < w < +\infty$ des w-Meridians entspricht. In der Tat, setzen wir $z = r$ und lassen r reell von 1 bis ∞ laufen, so läuft $w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)$ ebenfalls reell und ständig wachsend von 1 bis ∞. Aus diesem einen entstehen n weitere ausgezogene Kurven der z-Kugel durch die n linearen Substitutionen (2^a), das sind aber, wie wir aus dem vorigen Beispiele wissen, die Kugeldrehungen um die vertikale Achse $(0, \infty)$ durch die Winkel $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \dots \frac{2(n-1)\pi}{n}$; wir erhalten so die n Viertelmeridiane vom Nordpol ∞ nach den Punkten ε^ν des Aequators. Eine weitere ausgezogene Kurve erhalten wir, wenn wir etwa die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ anwenden, und zwar geht dadurch der Meridianquadrant von $+1$ nach ∞ in den unteren reellen Meridianquadranten verschafft hat.

Nun gehen wir an die Untersuchung der Einteilung der z-Kugel heran, wie sie einer Zerschneidung der Riemannschen Fläche über der w-Kugel längs des reellen Meridians entspricht; wir unterscheiden dabei auf dem reellen Meridian der w-Kugel ähnlich wie im vorigen Beispiel die durch die 3 Verzweigungsstellen hervorgerufenen Segmente von +1 bis ∞ (ausgezogen), von ∞ bis −1 (punktiert) und von −1 bis +1 (gestrichelt). Jedem dieser drei Segmente entsprechen auf der z-Kugel

w-Kugel:



z-Kugel:



(n = 3)

2n verschiedene Kurvenstücke, die aus einem von ihnen durch die 2n linearen Substitutionen (2) hervorgehen; es genügt daher immer eines von ihnen aufzufinden. Übrigens müssen alle diese Kurvenstücke die merkwürdigen Punkte $z = 0, \infty, \varepsilon^\nu, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^\nu$ verbinden, die wir uns zunächst auf der z-Kugel markieren; ihr Bild hat genau wie im früheren Falle einen

$w=\infty$ 2 Verzweigungspunkte der Multiplizität $n-1$

$w=+1$ n Verzweigungspunkte der Multiplizität 1

$w=-1$ n Verzweigungspunkte der Multiplizität 1.

Von den $2n$ Blättern der Riemannschen Fläche hängen daher am Punkte $w=\infty$ zweimal je n Blätter im Zyklus zusammen, bei $w=+1$ und $w=-1$ aber immer n-mal je 2 Blätter. Im einzelnen wird der Verlauf dieser Blätter anschaulich werden, wenn wir die entsprechende Einteilung der z-Kugel in Halbbereiche studieren.

Dazu ist es, wie oben bemerkt, gut, die linearen Substitutionen zu kennen, die unsere Gleichung (1) in sich überführen. Zunächst bleibt sie, genau wie die reine Gleichung, ungeändert bei den n Substitutionen

(2a) $z'=\varepsilon^{\nu}\cdot z$ $(\nu=0,1,\dots n-1)$, wo $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}}$,

da für diese jedenfalls $z'^n=z^n$ ist. Ebenso führen sie aber auch die weiteren n Substitutionen

(2b) $z'=\frac{\varepsilon^{\nu}}{z}$ $(\nu=0,1,\dots n-1)$

in sich über, da sie einfach z^n und $\frac{1}{z^n}$ vertauschen. Wir kennen damit $2n$ lineare Substitutionen der Gleichung (1) in sich, genau so viel also, als ihr Grad beträgt. Kennt man für irgend einen Wert von w also eine Wurzel z_0 der Gleichung, so kennt man ohne weiteres alle $2n$ Wurzeln $\varepsilon^{\nu}\cdot z_0$ und $\frac{\varepsilon^{\nu}}{z_0}$ $(\nu=0,1,\dots n-1)$, wenn man nur einmal die n^{te} Einheitswurzel sich

Führen wir neben der früher bereits benutzten n^{ten} Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

noch die folgende n^{te} Wurzel aus -1 ein:

$$\varepsilon' = e^{\frac{i\pi}{n}},$$

so werden die fehlenden $2n$ Nullstellen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^{\nu} \text{ und } \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1),$$

die zugehörigen Werte $z = \frac{z_1}{z_2}$ haben also sämtlich den Betrag 1 und liegen daher auf dem (dem Einheitskreise der z-Ebene entsprechenden) Aequator der z-Kugel, und zwar um gleiche Winkelabstände $\frac{\pi}{n}$ von einander entfernt. Wir haben daher als merkwürdige Punkte auf der z-Kugel:

den Südpol $z = 0$ u. Nordpol $z = \infty$ je mit der Multiplizität $n-1$, die $2n$ Aequatorialpunkte $z = \varepsilon^{\nu}$, $\varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu}$ je mit der Multiplizität 1.

Die Summe aller Multiplizitäten ist $2 \cdot (n-1) + 2n \cdot 1 = 4n - 2$, wie es das allgemeine Theorem von S. 245 für den Grad $2n$ auch verlangt. Vermöge der Gleichung (1) entspricht den merkwürdigen Punkten $z = 0, \infty$ auf der w-Kugel $w = \infty$, ferner allen Punkten $z = \varepsilon^{\nu}$ $w = +1$ und endlich allen $z = \varepsilon' \cdot \varepsilon^{\nu}$ $w = -1$. Es gibt demnach nur 3 Verzweigungsstellen $\infty, +1, -1$ auf der w-Kugel, aber es liegen über ne Behauptung, daß die Dreiteilung des Winkels für willkürliches φ nicht durch eine endliche Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals ausführbar ist, vollständig bewiesen; die Bemühungen der Winkeldreiteilungsleute müssen also immer vergeblich bleiben!

Ich komme nunmehr zur Behandlung eines ein wenig komplizierteren Beispieles, der sog.

2. Diedergleichung,

deren Name später zu erklären sein wird; sie lautet:

$$(1) \qquad w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Ihr Grad ist, wie sich nach Multiplikation mit z^n ergibt, $2n$. Durch Einführung homogener Variabler erhalten wir

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n \cdot z_2^n},$$

wo in der Tat Formen $2n^{ter}$ Dimension in Zähler und Nenner auftreten. Deren Funktionaldeterminante ist nun

$$\begin{vmatrix} 2n \cdot z_1^{2n-1}, & 2n\, z_2^{2n-1} \\ 2n\, z_1^{n-1} z_2^n, & 2n\, z_1^n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = 4n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1} (z_1^{2n} - z_2^{2n}).$$

Sie hat $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ zunächst je zur $(n-1)$-fachen Nullstelle; die übrigen $2n$ Nullstellen ergeben sich aus:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0 \text{ oder } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \pm 1.$$

alle 3 Blätter durchlaufende Kurve wird durch Gleichung (3) auf den Einheitskreis der z-Kugel eineindeutig abgebildet, und kann daher gewissermaßen als ihr „eindimensionales Riemannsches Gebilde" angesprochen werden. Ebenso können wir aber offenbar jeder Gleichung der Form $f(z, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$ ein solches Riemannsches Gebilde zuordnen, indem wir soviele Exemplare des Einheitskreises mit der Bogenlänge φ nehmen, als die Gleichung Wurzeln hat, und sie entsprechend dem Zusammenhange der Wurzeln aneinanderheften. Nun folgt weiter genau wie früher, daß die Gleichung (3) nur dann reduzibel sein kann, wenn ihr eindimensionales Riemannsches Gebilde in getrennte Teile zerfällt, und das ist offenbar nicht der Fall. Damit ist die Irreduzibilität unserer Gleichung (3) bewiesen.

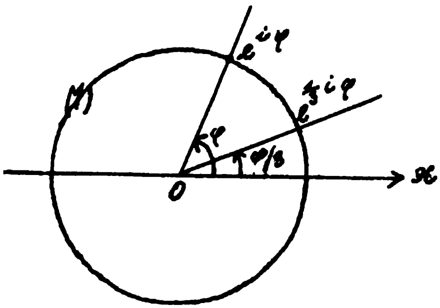
Nunmehr läßt sich aber der frühere Beweis, daß eine durch eine Folge von Quadratwurzeln lösbare kubische Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten reduzibel ist, wörtlich auf den vorliegenden Fall der funktionentheoretisch irreduziblen Gleichung (3) übertragen (s. S. 131 ff); man braucht nur statt „rationaler Zahlen" stets „rationale Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$" zu setzen. Damit ist dann un-

und das analytische Aequivalent unserer geometrischen Aufgabe ist (vgl. S. 125), diese Gleichung durch eine endliche Anzahl übereinander geschachtelter Quadratwurzeln aus rationalen Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ zu lösen – denn diese Größen sind die Koordinaten des Punktes w, von denen wir bei unserer Konstruktion ausgehen sollen.

Wir haben nun zuerst zu zeigen, daß die Gleichung (3) irreduzibel im funktionentheoretischen Sinne ist. Freilich hat diese Gleichung nicht genau die oben bei der Begriffserklärung angenommene Form, denn statt des rational eingehenden komplexen Parameters w treten die beiden Funktionen $\cos$, $\sin$ eines reellen Parameters φ ihrerseits rational auf. Wir werden in naturgemäßer Fortbildung unserer Begriffe hier das Polynom $z^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ reduzibel nennen, wenn es sich in Polynome in z zerspalten läßt, deren Koeffizienten gleichfalls rationale Funktionen von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ sind, und dafür können wir ein ganz ähnliches Kriterium, wie vorhin angeben. Lassen wir nämlich φ in (3) alle reellen Werte durchlaufen, so durchläuft $w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ den Einheitskreis der w-Ebene, dem vermöge der stereographischen Projektion auf der w-Kugel der Aequator entspricht; die über diesem auf der Riemannschen Fläche der Gleichung $z^3 = w$ liegende in einem Zuge

Gleichung zurückführen, und dann schließen, daß diese nicht durch eine Folge von Quadratwurzeln lösbar ist; nur wird jetzt in die Gleichung *ein Parameter* – der Winkel φ – eingehen, während früher die Koeffizienten ganze Zahlen waren, und demgemäß muß die *funktionentheoretische Irreduzibilität an Stelle der zahlentheoretischen* auftreten.

Um die Gleichung des Problemes anzusetzen, denken wir uns in der w-Ebene den Winkel φ an die



positive reelle Halbachse angetragen; dann schneidet sein freier Schenkel den Einheitskreis in dem Punkte

$$w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Unsere Aufgabe kommt darauf hinaus, eine vom speziellen Werte von φ unabhängige, aus einer endlichen Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals bestehende Konstruktion zu finden, die jedesmal den Schnitt des Einheitskreises mit dem Schenkel des Winkels $\frac{\varphi}{3}$ liefert, d. h. den Punkt:

$$z = e^{\frac{i\varphi}{3}} = \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} .$$

Dies z genügt der Gleichung

$$(3) \qquad z^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

Danach können wir jetzt sofort behaupten, daß die Gleichung $z^n - w = 0$ gewiß irreduzibel im funktionentheoretischen Sinne ist. Denn bei ihrer Riemannschen Fläche, die wir genau kennen, hängen ja an jedem Verzweigungspunkte alle n Blätter im Zyklus zusammen, und obendrein ist die ganze Fläche auf die zusammenhängende unzerschnittene z-Kugel abgebildet; von einem Zerfallen kann also nicht die Rede sein.

Im Anschluß hieran können wir eines der schon früher berührten populären Probleme der Mathematik erledigen, nämlich das der Teilung eines beliebigen Winkels φ in n gleiche Teile, insbesondere – für $n = 3$ – das der Trisektion des Winkels. Die Aufgabe ist hier die, eine exakte Konstruktion mit Zirkel und Lineal anzugeben, die für jeden beliebigen Winkel φ die Dreiteilung leistet; für eine Reihe spezieller Werte φ lassen sich ja solche Konstruktionen leicht angeben. Ich will Ihnen hier noch den Gedankengang des Beweises für die Unmöglichkeit der Winkeltrisektion im bezeichneten Sinne vortragen, und bitte Sie dabei, sich des Unmöglichkeitsbeweises für die Konstruktion des regulären Siebenecks mit Zirkel und Lineal zu erinnern (vgl. S. 126 ff). Genau wie damals werden wir nämlich auch hier das Problem auf eine irreduzible kubische nome zerlegen läßt:

$$f(z,w) = f_1(z,w) \cdot f_2(z,w);$$

andernfalls heißt sie irreduzibel in Bezug auf w. Die ganze Verallgemeinerung gegen den früheren Begriff ist hierbei die, daß wir als „Rationalitätsbereich", in dem wir operieren und dem wir die Koeffizienten der zuzulassenden Polynome entnehmen wollen, statt der Gesamtheit der rationalen Zahlen die Gesamtheit der rationalen Funktionen der Parameter w zu Grunde legen – daß wir also von einer rein zahlentheoretischen zu einer funktionentheoretischen Auffassung übergehen.

Veranschaulichen wir nun jede Gleichung $f(z,w) = 0$ durch ihre Riemannsche Fläche, so können wir ein einfaches Kriterium für die Reduzibilität in diesem neuen Sinne aufstellen. Ist nämlich die Gleichung reduzibel, so muß jedes ihr genügende Wertsystem $z \mid w$ entweder $f_1(z,w) = 0$ oder $f_2(z,w) = 0$ genügen; nun werden die Lösungen von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ durch deren Riemannsche Flächen repräsentiert, die miteinander nichts zu tun haben und insbesondere nicht zusammenhängen können. Also muß die zu einer reduziblen Gleichung $f(w,z) = 0$ gehörige Riemannsche Fläche in mindestens zwei getrennte Stücke zerfallen.

einander über.

Hätten wir von vornherein also nur 1 schraffiertes Teilgebiet der Kugel bestimmt, so würde uns diese Bemerkung alle gleichartigen Teilgebiete liefern. Dabei ist nur die Eigenschaft der Substitutionen (2) benutzt, daß sie die Gleichung (1) in sich selbst (d.h. $z^n = w$ in $z'^n = w$) überführen, und daß ihre Anzahl mit der Gradzahl übereinstimmt. In den folgenden Beispielen werden wir stets von vornherein solche lineare Substitutionen angeben können, und werden von der dadurch ermöglichten wesentlichen Vereinfachung der Bestimmung der Gebietsteilung stets Gebrauch machen.

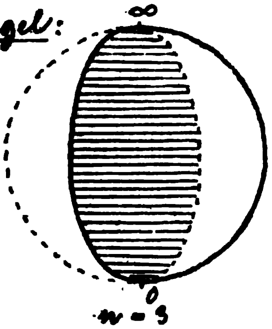
Wir wollen uns nun noch an dem vorliegenden Beispiele einen wichtigen allgemeinen Begriff klar machen, nämlich den Begriff der Irreduzibilität für Gleichungen, die einen Parameter w rational enthalten; von der Irreduzibilität von Gleichungen mit rationalen Zahlenkoeffizienten hatten wir schon früher gelegentlich der Konstruktion des regulären Siebenecks gesprochen (S. 127 ff.) Eine Gleichung $f(z, w) = 0$ (etwa unser Beispiel $z^n - w = 0$), wo $f(z, w)$ ein Polynom in z ist, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von w sind, heißt reduzibel in Bezug auf den Parameter w, wenn sich f in ein Produkt zweier gleichartiger Poly-

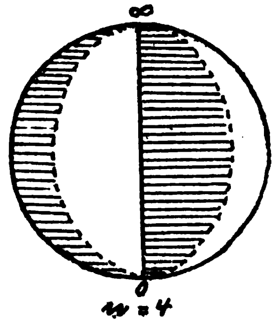
Methoden zur numerischen Berechnung von z werden wir später noch zurückzukommen haben.

Hier wollen wir nur noch die wichtige Frage nach der gegenseitigen Beziehung der einzelnen gleichartigen Gebiete der z-Kugel erledigen. Praeziser gesagt: $w = z^n$ nimmt den gleichen Wert an je einer Stelle jeder der n schraffierten Gebiete an; lassen sich die zugehörigen Werte z nicht einfach durch einander ausdrücken? In der Tat bemerken wir sofort, daß für $z' = z \cdot \varepsilon$, wo ε irgend eine n^{te} Einheitswurzel ist, $z'^n = z^n$ wird, d. h. $w = z^n$ nimmt an allen n Stellen

(2) $z' = \varepsilon^\nu \cdot z = e^{\frac{2\nu i\pi}{n}} \cdot z \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1)$

den gleichen Wert an. Diese n Stellen müssen sich also gerade auf alle n schraffierten Bereiche verteilen und jeden von ihnen durchlaufen, wenn z einen durchläuft, und das gleiche gilt von den nichtschraffierten Bereichen. Nun bedeutet jede der Substitutionen (2) geometrisch eine Drehung der z-Kugel um die vertikale Achse $0, \infty$ durch einen Winkel $\nu \cdot \frac{2\pi}{n}$, da in der komplexen Ebene bekanntlich Multiplikation mit $e^{\frac{2\nu i\pi}{n}}$ eine Drehung um den Nullpunkt durch jenen Winkel darstellt. Also gehen entsprechende Punkte unserer Kugelgebiete wie diese Gebiete selbst durch jene n Drehungen um die vertikale Achse in-z-Kugel:





ersten Fälle $w = 3, 4$ klar zu sehen ist. – Ich weise hier noch ausdrücklich darauf hin, wie notwendig der Uebergang zur komplexen *Kugel* für das volle Verständnis der Sachlage ist; in der komplexen z-*Ebene* hätte man eine Einteilung in geradlinig begrenzte vom Nullpunkt ausstrahlende Sektoren, und es wäre keineswegs so anschaulich, daß $z = \infty$ als merkwürdiger Punkt bezw. $w = \infty$ als Verzweigungspunkt die gleiche Bedeutung hat wie $z = 0$ bezw. $w = 0$.

Damit ist die Grundlage für die genaue Kenntnis des funktionalen Zusammenhanges zwischen z und w geschaffen; wir hätten jetzt nur noch die *konforme Abbildung eines jeden der $2n$ Kugelzweiecke auf die eine oder die andere w-Halbkugel zu studieren*. Darauf will ich jedoch hier nicht näher eingehen; jedem, der sich überhaupt mit konformer Abbildung beschäftigt hat, ist ja dieser Fall als einer der einfachsten äußerst anschaulichen Beispiele durchaus geläufig. Auf die Be-

reichende kongruente Zweiecke zerlegt – etwa wie man eine Apfelsine zu zerschneiden pflegt. Diese Teilung genügt genau der allgemeinen Theorie; insbesondere stoßen nur in den merkwürdigen Punkten – den beiden Polen – mehr als 2 Halbbereiche, und zwar 2 . n entsprechend der Multiplizität n–1 zusammen. Was nun die *Schraffierung der Bereiche* angeht, so brauchen wir sie nur für *einen* Bereich festzulegen; die übrigen sind dann alternierend zu schraffieren und freizulassen. Nun bemerken wir, wenn wir die schraffierte Hälfte der w-Kugel (die Hinterseite also) betrachten, daß das ausgezogene Stück der Begrenzung zur Linken, das gestrichelte am Rechten liegt; da es sich um eine konforme Abbildung ohne Winkelumlegung handelt, *muß jedes schraffierte Gebiet der z-Kugel also dieselbe Lageneigenschaft haben, daß ein ausgezogenes Begrenzungsstück links, ein gestricheltes rechts liegt.* Wir beherrschen danach die Gebietseinteilung der z-Kugel vollkommen; übrigens ist noch ein charakteristischer Unterschied der Verteilung der Gebiete auf beide z-Halbkugeln zu bemerken, je nachdem n gerade oder ungerade ist, wie das aus den beiden Figuren für die schraffiert. Auf dem Meridianschnitt wollen wir noch stets den Halbmeridian der positiven reellen Zahlen (in der Figur ausgezogen) und den der negativen (gestrichelt) unterscheiden.

Nunmehr haben wir die Bilder dieser Meridiankurve L auf der z-Kugel zu untersuchen, die dort die charakteristische Teilung in Halbbereiche hervorrufen. Auf dem positiven Halbmeridian ist $w = r$, wo r reell von 0 bis ∞ läuft; dafür wird nach einer bekannten Formel der komplexen Zahlen:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ wo } k = 0, 1, \dots n-1;$$

das durchläuft für die verschiedenen Werte von k diejenigen n Halbmeridiane der z-Kugel, die mit dem Halbmeridian der positiven reellen Zahlen die Winkel $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \dots \frac{2(n-1)\pi}{n}$ bilden. Diese Kurven entsprechen also der ausgezogenen Hälfte von L. Analog haben wir auf dem negativen Halbmeridian der w-Kugel zu setzen $w = -r = r \cdot e^{i\pi}$, wo wiederum $0 \leqq r \leqq \infty$, und daraus ergibt sich

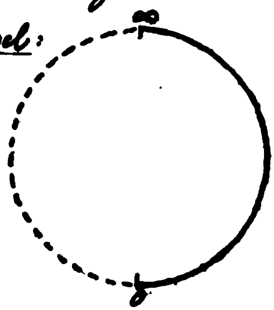
$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right), \text{ wo } k = 0, 1, \dots n-1;$$

denen entsprechen aber die n Halbmeridiane der z-Kugel mit den „geographischen Längen" $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$, die also die Winkel der vorigen halbieren. Demnach wird die z-Kugel in $2n$ vom Nordpol nach dem Südpol und bilden die Funktionaldeterminante der Zähler und Nenner der rechten Seite:

$$\begin{vmatrix} n z_1^{n-1}, & 0 \\ 0, & n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = n^2 z_1^{n-1} \cdot z_2^{n-1}.$$

Sie hat ersichtlich $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, oder – inhomogen geschrieben – $z = 0$ und $z = \infty$ je zur $(n-1)$-fachen Nullstelle, womit sämtliche merkwürdigen Punkte von der Gesamtmultiplizität $2n-2$ bekannt sind. Nach unserem allgemeinen Theorem liegen daher an den vermöge $w = z^n$ entsprechenden Stellen $w = 0$ und $w = \infty$ die einzigen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche über der w-Kugel, und zwar haben beide die Multiplizität $n-1$, so daß an jedem alle n Blätter im Zyklus zusammenhängen. Wir markieren uns nun weiter auf der w-Kugel

w-Kugel:



den Meridian der reellen Zahlen als Kurve $\mathfrak{C}$ und schneiden nach entsprechender Verschiebung der Verzweigungsschnitte alle Blätter der Riemannschen Fläche längs dieses Meridianes auf; wir denken uns von den $2n$ Halbkugeln, in die die Fläche so zerfällt, jedesmal die über der hinteren Hälfte der w-Kugel gelegene, die also w-Werten mit positiv imaginärem Teile entspricht, schraffierte bezw. nichtschraffierte Halbbereiche bezeichnen; sie werden von einander getrennt durch die n Bilder, die die n-deutige Funktion $z(w)$ von jedem der Stücke AB, BC, ... der Kurve C auf der z-Kugel entwirft. Jeder schraffierte Halbbereich stößt längs solcher Bildkurven von C an lauter nichtschraffierte, jeder nichtschraffierte an lauter schraffierte an; nur in einem μ-fachen merkwürdigen Punkte laufen mehr als 2 Halbbereiche, und zwar je $\mu + 1$ schraffierte und nichtschraffierte zusammen.

Diese Gebietseinteilung der z-Kugel soll uns nun dazu dienen, den Verlauf der Funktion $z(w)$ für einige einfache und charakteristische Beispiele bis in alle Einzelheiten zu verfolgen. Ich beginne mit einem möglichst einfachen Beispiele,

1. der „reinen" Gleichung

(1) $$z^n = w.$$

Man gibt ihre Lösung bekanntlich formal durch Einführung des Wurzelzeichens an: $z = \sqrt[n]{w}$, doch ist damit für die Erkenntnis des funktionalen Zusammenhanges von z und w nicht viel gewonnen. Wir verfahren nun genau nach der allgemeinen Vorschrift: Wir führen homogene Variable ein:

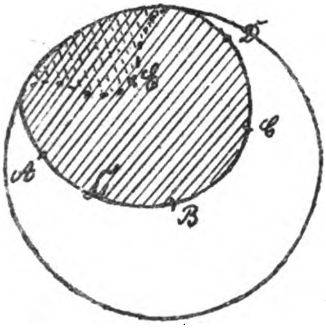
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{\,n}}{z_2^{\,n}},$$

n von Verzweigungen ganz freie über jeder der beiden durch L geschiedenen Kugelkalotten ausgebreitete „Halbblätter". Entsprechend der obigen Unterscheidung der Kugelkalotten werden wir auch hier n schraffierte und n nichtschraffierte Halbblätter unterscheiden. Und nun können wir den Aufbau der ursprünglichen Riemannschen Fläche so beschreiben: Jedes schraffierte Halbblatt war auf ihr von lauter nichtschraffierten Halbblättern umgeben, mit denen es längs der über AB, BC ... gelegenen Stücke von L zusammenhing, und ebenso war jedes nichtschraffierte Halbblatt längs solcher Kurvenstücke von lauter schraffierten umgeben. Mehr als 2 Halbblätter aber können nur an einem Verzweigungspunkte zusammenstoßen, und zwar liegen um einen μ-fachen Verzweigungspunkt genau $\mu + 1$ schraffierte und $\mu + 1$ nichtschraffierte Halbblätter alternierend herum.

Da die z-Kugel mittels unserer Funktion $w(z)$ eineindeutig auf die Riemannsche Fläche über der w-Kugel abgebildet ist, können wir diese Zusammenhangsverhältnisse sofort auf sie übertragen: Wegen der Stetigkeit entsprechen den $2n$ Halbblättern der Fläche $2n$ zusammenhängende z-Bereiche, die wir als nen Falle zu reden – jedes Blatt der Riemannschen Fläche mit einem andern zusammenhängenden Blatte längs einer zwei Verzweigungspunkte verbindenden *Verzweigungsschnittes*; bekanntlich bleibt die Riemannsche Fläche ihrem Wesen nach ungeändert, wenn man diese Schnitte beliebig auf ihr verschiebt und nur ihre Endpunkte festhält, d. h. dieselben Blätter längs anderer dieselben Verzweigungspunkte verbindender Kurven miteinander zusammenhängen läßt. In dieser Variabilität liegt die große Allgemeinheit, aber zugleich auch die große Schwierigkeit der Idee der Riemannschen Fläche. Um nun unserer Fläche eine bestimmte der konkreten Vorstellung leicht zugängliche Gestalt zu geben, *verschieben wir alle Verzweigungsschnitte so, daß sie sämtlich über jener oben festgelegten Kurve C durch alle Verzweigungsstellen liegen*; dabei können gerne über demselben Teile von C mehrere Verzweigungsschnitte verlaufen, über anderen brauchen auch gar keine Schnitte zu liegen.

Nunmehr schneiden wir den ganzen Blätterkomplex, d. h. jedes einzelne *Blatt längs dieser Kurve C auf*; da wir alle Verzweigungsschnitte vorher über C verlegt haben, und sie damit sämtlich durchschneiden, *zerfällt unsere Riemannsche Fläche in je* dann verschiedene von einander getrennte Serien von Blättern, deren jede in sich zusammenhängt. Jede solche Stelle der w-Kugel nennen wir eine Verzweigungsstelle, und bezeichnen sie fortlaufend mit $A, B, C \ldots$; die Anzahl dieser Verzweigungsstellen kann also kleiner sein als ν.

Wir wollen nun die Riemannsche Fläche, von der wir nach den bisherigen Angaben nur sehr verschwommene Vorstellungen haben können, so zurecht machen, daß sie eine übersichtlichere Gestalt annimmt. Dazu legen wir durch die Verzweigungsstellen $A, B, C \ldots$ auf der w-Kugel



irgend eine in sich zurücklaufende sich nicht durchdringende Kurve L möglichst einfacher Gestalt, und unterscheiden die eine der beiden durch sie entstehenden Kugelkalotten durch Schraffierung von der anderen. Bei allen später von uns zu behandelnden Beispielen werden die $A, B, C \ldots$ sämtlich reell sein, wir werden dann natürlich als Kurve L den Meridiankreis der reellen Zahlen nehmen, so daß jedes unserer beiden Teilgebiete eine Halbkugel ist.

Nun durchdringt sich – um weiter vom allgemeirust formulierten besteht darin, daß sie endliche und unendliche Werte von z und w in eine Aussage zusammenfaßt. Auch über die Anzahl der merkwürdigen Punkte gestattet sie eine präzise Aussage: Es sind nämlich die 4 Ableitungen Formen der Dimension $n-1$, und daher ist die Funktionaldeterminante eine Form der Dimension $2n-2$. Ein solches Polynom hat unter Berücksichtigung der Vielfachheit immer genau $2n-2$ Nullstellen. Sind also $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r$ die merkwürdigen Punkte der z-Kugel (d. h. $\varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2 = 0$ für $z_1 : z_2 = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$), und sind bezüglich $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r$ ihre Multiplizitäten, so ist deren Summe

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 2n - 2.$$

Diesen Punkten entsprechen vermöge der konformen Abbildung die r Verzweigungspunkte

$$a_1, a_2 \ldots a_r$$

der Riemannschen Fläche über der w-Kugel, die auf der Fläche notwendig getrennt liegen müssen, und um die herum bez. $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r$ Blätter im Zyklus zusammenhängen. Es ist aber zu bemerken, daß verschiedene dieser Verzweigungspunkte über derselben Stelle der w-Kugel liegen können, da sich ruhig aus $w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ für $z = \alpha_1 \ldots \alpha_r$ verschiedene Male derselbe Wert von w ergeben kann; über einem solchen Punkte verlaufen daher wird auf der rechten Seite von (3!):

$$\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi = \begin{vmatrix} d\varphi, & d\psi \\ \varphi, & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{n^2}\begin{vmatrix} \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2, & \psi_1\, dx_1 + \psi_2\, dx_2 \\ \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2, & \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 \end{vmatrix},$$

und das ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$= \frac{1}{n^2}\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \psi_1, & \psi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx_1, & dx_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix}.$$

Daher geht (3!) über in:

$$\frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{w_2^2} = \frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{n^2 \cdot \psi^2}(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2).$$

Damit haben wir die Grundformel der homogenen Theorie unserer Gleichung gewonnen, und als maßgebender Ausdruck für alles folgende tritt die Funktionaldeterminante $\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2$ der Formen φ, ψ auf. Bis auf diesen Faktor steht rechts das Differential von $x = \frac{x_1}{x_2}$, links das von $w = \frac{w_1}{w_2}$, und da für endliche x und w die merkwürdigen Punkte bekanntlich aus $\frac{dw}{dx} = 0$ folgen, erscheint folgender Satz plausibel, auf dessen genauen Beweis ich hier allerdings eben nicht eingehe: Jede μ-fache Nullstelle der Funktionaldeterminante ist ein merkwürdiger Punkt der Multiplizität μ, d. h. ihm entspricht ein μ-facher Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche über der w-Kugel. Der Hauptvorzug dieser Regel vor dem die diese Aufgaben lösen, ohne ausführlichen Beweis anzugeben; ich nehme dabei an, daß diese eigentlich recht einfachen funktionentheoretischen Tatsachen Ihnen im allgemeinen geläufig sind, wenn auch nicht gerade in der homogenen Darstellung, die ich hier bevorzuge. Die abstrakten Dinge, die ich Ihnen demgemäß zunächst werde vorzutragen haben, werden später an einer Reihe von Beispielen konkrete anschauliche Gestalt gewinnen.

Zunächst eine kleine Rechnung, die uns das Analogon des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ in homogenen Koordinaten liefern soll! Wir bilden das Differential der Gleichung (3):

$$(3') \qquad \frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{w_2^2} = \frac{\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi}{\psi^2}$$

Nun ist

$$d\varphi = \varphi_1\, dz_1 + \varphi_2\, dz_2$$
$$d\psi = \psi_1\, dz_1 + \psi_2\, dz_2,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_2}$$
$$\psi_1 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad \psi_2 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_2}$$

Andererseits ist nach dem Eulerschen Theorem für homogene Funktionen vom Grade n:

$$\varphi_1 \cdot z_1 + \varphi_2 \cdot z_2 = n \cdot \varphi$$
$$\psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 = n \cdot \psi;$$

durch das Erweitern in den Term $z_2^n \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^i = z_2^{n-i} z_1^i$ der Dimension n verwandelt.

Wir kommen jetzt dazu, unter konsequenter Verwendung der beiden eingeführten Hilfsmittel – der Repräsentation auf der komplexen Kugel und der homogenen Variablen – die funktionale Abhängigkeit, die unsere Gleichung (1) zwischen z und w statuiert, in allen ihren Einzelheiten zu studieren. Wir werden diese Aufgabe gelöst haben, wenn wir uns eine vollkommene Vorstellung der konformen Abbildung zwischen der z-Kugel und der Riemannschen Fläche über der w-Kugel machen können.

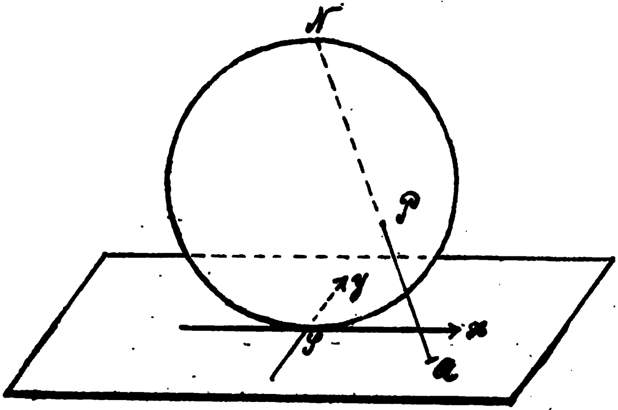
Da haben wir nun vor allem nach der Art und der Lage der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche zu fragen; ich erinnere hier bald daran, daß ein μ-facher Verzweigungspunkt ein solcher ist, an dem $\mu+1$ Blätter zusammenhängen. Da w eine eindeutige Funktion von z ist, kennen wir die Verzweigungspunkte, wenn wir die ihnen entsprechenden Punkte der z-Kugel kennen; ich pflege sie schlechtweg merkwürdige oder bemerkenswerte Punkte der z-Kugel zu nennen. Auch ihnen entspricht eine gewisse Multiplizität, gleich der Vielfachheit des zugehörigen Verzweigungspunktes. Ich will nun die Sätze, tun, um die Ausnahmestellung des Unendlichen in den Formeln zu beseitigen, und dieser Schritt ist die Einführung der homogenen Variablen. Wir setzen nämlich $z = \frac{z_1}{z_2}$ und betrachten z_1 und z_2 als zwei unabhängige komplexe Variable, derart freilich, daß $z_1 | z_2$ und $c \cdot z_1 | c \cdot z_2$ bei beliebigem c dieselbe Stelle darstellen. Nun mögen z_1, z_2 alle endlichen Wertepaare durchlaufen, nur nicht gleichzeitig verschwinden; dann erhalten wir nach der genannten Festsetzung für jeden beliebigen endlichen Wert von z genau eine entsprechende Stelle, außerdem aber noch eine Stelle (z_1 beliebig, $z_2 = 0$) die unendlich groß werdendem z entspricht. Damit haben wir also auch das arithmetische Aequivalent der einen unendlich fernen Stelle. In derselben Weise setzen wir natürlich auch $w = \frac{w_1}{w_2}$, und wir werden nun die „homogene" Gleichung zwischen den „homogenen" Variablen z_1, z_2 und w_1, w_2 aufstellen, die der Gleichung (2) entspricht; sie lautet, wenn wir den Bruch in (2) mit z_2^n erweitern:

$$(3) \qquad \frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2^n \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\varphi(z_1, z_2)}{\psi(z_1, z_2)}.$$

Hierin sind $\varphi(z_1, z_2)$, $\psi(z_1, z_2)$ ganze rationale Funktionen von z_1 und z_2, da $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ das $z = \frac{z_1}{z_2}$ höchstens in der n^{ten} Potenz enthalten, und obendrein sind es sogar homogene Polynome (Formen) der Dimension n; denn jeder Term z^i von $\varphi(z)$ oder $\psi(z)$ wird dann wird unsere Funktion durch eine Abbildung der z-Kugel auf die w-Kugel dargestellt, und diese ist, wie die Abbildung der beiden Ebenen, konform, da nach einem bekannten Satze auch die stereographische Abbildung der Ebene auf die Kugel konform ist. Dabei werden einer Stelle der w-Kugel im allgemeinen n verschiedene Stellen der z-Kugel entsprechen; um eine eindeutige Beziehung zu erreichen, denken wir uns daher wiederum n Exemplare der w-Kugel übereinander bezw. ineinander gelegt und verbinden sie durch Verzweigungspunkte in geeigneter Weise zu einer n-blättrigen Riemannschen Fläche über der w-Kugel. Diese Vorstellung hat keine grössere Schwierigkeit, als die einer Riemannschen Fläche über der Ebene. Damit ist endlich die algebraische Gleichung (1) geometrisch gedeutet als eindeutige im allgemeinen konforme Beziehung der Riemannschen Fläche über der w-Kugel einerseits und der schlichten z-Kugel andererseits; in diese Deutung sind offenbar auch unendliche Werte von z und w, die einander oder endlichen Werten entsprechen, mit einbezogen.

Wollen wir nun diese neu eingeführten geometrischen Hilfsmittel voll ausnutzen können, so müssen wir auch in der Algebra einen entsprechenden Schritt

Punkt Q $(x \mid y)$ der Ebene entspricht dabei eindeutig der zweite Schnitt P des Strahles NQ mit der Kugel und umgekehrt entspricht jedem Punkte P der Kugel – mit Ausnahme von N – eindeutig ein Punkt Q mit bestimmten Koordinaten x, y; wir können daher P als Repräsentanten der Zahl $x + iy$ ansehen.



Rückt nun aber P irgendwie in den Nordpol N, so entfernt sich Q stets ins Unendliche, und umgekehrt; es erscheint also naturgemäß, diesen Punkt N, dem keine endliche komplexe Zahl zugeordnet ist, als einzigen Repräsentanten aller unendlich großen $x + iy$, d. h. als konkretes Abbild des sonst nur symbolisch eingeführten unendlich fernen Punktes der Zahlenebene anzusehen, und ihm schlechtweg die Marke ∞ zuzuordnen. Hierdurch ist nun im geometrischen Bilde völlige Gleichberechtigung aller endlichen und des unendlich fernen Punktes erzielt.

Wir wollen nun, um zur geometrischen Deutung unserer algebraischen Beziehung (1) zurückzukehren, auch die w-Ebene durch eine w-Kugel ersetzen.

dung übergehen, ist es zweckmäßig *einige Maßnahmen* zu treffen, welche die gar nicht im Wesen der Sache liegende *Ausnahmestellung unendlich großer Werte von w und z beseitigen* und das bequeme Aussprechen ausnahmslos geltender Sätze ermöglichen sollen. Da diese Verabredungen nicht so allgemein benutzt werden, wie es wohl wünschenswert wäre, so sei ein Wort mehr über sie gestattet. Es kann uns nämlich hier nicht genügen, daß man einfach symbolisch von *einem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene* spricht, denn das läßt gänzlich die konkrete Vorstellung vermissen, und man kann obendrein immer erst durch besondere Überlegungen oder Verabredungen herausbekommen, was einer bestimmten Eigenschaft eines endlichen Punktes beim unendlich fernen analog ist. *Wir erhalten aber alles, was wir wünschen, wenn wir ein für alle Male die Gaußsche Ebene als Repräsentanten der komplexen Zahlen durch die Riemannsche Kugel ersetzen.* Wir denken uns dazu einfach auf den Nullpunkt der Zahlenebene eine berührende Kugel vom Durchmesser 1 aufgesetzt und durch *stereographische Projektion* von dem dem Berührungspunkt (Südpol S der Kugel) gegenüberliegenden Nordpol N auf die Ebene bezogen. Jedem sten in ihnen auftretenden Potenz von z sei n. Nach dem Fundamentalsatz hat diese Gleichung für jeden bestimmten Wert von w n im allgemeinen verschiedene Wurzeln z. Umgekehrt aber folgt aus (1)

$$(2) \qquad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

d. h. w ist eine eindeutige rationale Funktion von z, die – wie man sagt – vom Grade n ist. Wollten wir nun als geometrisches Aequivalent der Gleichung (1) einfach die durch diese Funktion entstehende konforme Abbildung zwischen der komplexen z- und w-Ebene verwenden, so würde die Vieldeutigkeit der z als Funktion von w die Uebersicht stören; wir machen es aber, wie stets in der Funktionentheorie üblich: Wir denken uns die w-Ebene in n übereinander gelegten Exemplaren (Blättern) vorhanden und verbinden diese n Blätter in geeigneter Weise durch Verzweigungspunkte zu einer n-blättrigen Riemannschen Fläche, wie Ihnen das aus den Anfängen der Lehre von den algebraischen Funktionen ja allen bekannt ist. Dann vermittelt unsere Funktion eine eineindeutige im allgemeinen konforme Beziehung zwischen den Punkten der Riemannschen Fläche über der w-Ebene einerseits und der schlichten z-Ebene andererseits.

Bevor wir nun zum genaueren Studium dieser Abbilgebra halte, genügen. Lassen Sie sie mich noch mit dem Hinweis abschließen, daß die Bedeutung der Zulassung komplexer Zahlen in der Algebra gerade darin besteht, daß sie den allgemeinen ausnahmslosen Ausspruch des Fundamentalsatzes gestatten; bei Beschränkung auf reelle Größen könnte man nur sagen, daß die Gleichung n ten Grades entweder n Wurzeln hat, oder weniger oder auch gar keine.

Den Rest der Zeit, der uns nun noch für die Algebra bleibt, wollen wir dazu verwenden, die sämtlichen Lösungen komplexer Gleichungen anschaulich zu diskutieren, so wie wir das früher für die reellen Lösungen reeller Gleichungen taten. Dabei wollen wir uns aber auf

B. Gleichungen mit 1 komplexen Parameter

beschränken, und obendrein noch annehmen, daß dieser nur linear auftritt; dann wird das Studium einer einfachen konformen Abbildung alles ergeben, was wir wünschen.

Es sei $z = x + iy$ die Unbekannte, $w = u + iv$ der Parameter, dann ist also der Typus der zu betrachtenden Gleichung:

$$(1) \qquad \varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0,$$

wo φ, ψ Polynome in z sind; der Exponent der höch-

Gedankengang aber ist im vorigen dargelegt. Hat man so <u>eine</u> Wurzel gewonnen, so kann man von $f(x)$ einen Linearfaktor abspalten und den Schluss für das entstehende Polynom $(n-1)^{ten}$ Grades wiederholen. So fortschreitend <u>findet man schließlich in der Tat die Zerspaltung in n Linearfaktoren bezw. die Existenz von n Nullstellen.</u>

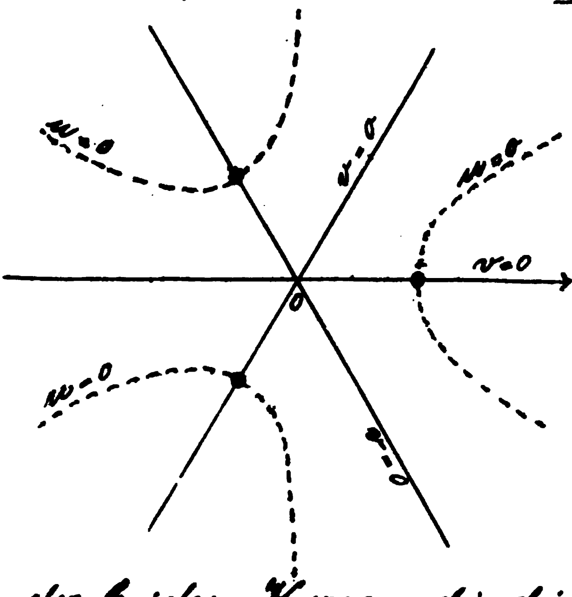
Das Schlussverfahren wird Ihnen viel deutlicher werden, wenn Sie sich <u>spezielle Beispiele wirklich durchkonstruieren.</u> Ein einfachstes Beispiel wäre

$$f(x) = x^3 - 1 = 0;$$

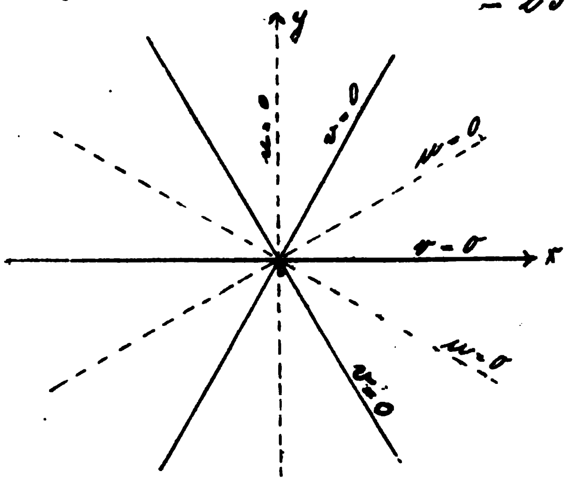
da wird offenbar

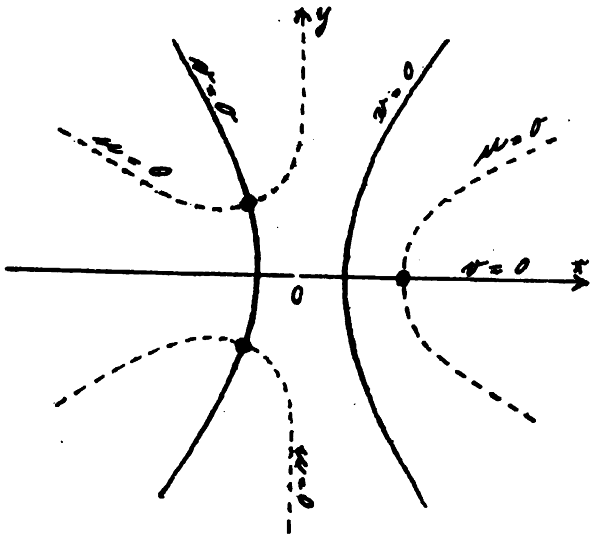
$$u = r^3 \cos 3\varphi - 1, \quad v = r^3 \cdot \sin 3\varphi,$$

so dass $v = 0$ einfach aus drei Geraden besteht, während $u = 0$ 3 hyperbelartige Aeste besitzt. Sie sehen an der Zeichnung in der Tat die 3 Schnitte der beiden Kurven, die die drei Wurzeln unserer Gleichung geben. Ich kann die Durchführung weiterer komplizierterer Beispiele sehr anempfehlen.



Diese kurzen Andeutungen über den Fundamentalsatz mögen hier, wo ich ja keine Vorlesung über Al-





steht (nebenstehend für n = 3 gezeichnet). Im zentralen Teil der Figur können die wahren Kurven u = 0, v = 0 von diesen Geraden natürlich wesentlich abweichen, jedenfalls müssen sie weiterhin nach außen asymptotisch sich ihnen nähern und *wir können ihren Verlauf schematisch geradezu so darstellen, daß wir außerhalb eines großen Kreises jene Geraden beibehalten und sie innen irgendwie verbinden*. Ganz gleichgültig aber, wie dieser innere Verlauf sein mag, die ins Unendliche verlaufenden Äste u, v müssen jedenfalls beim Umlaufen der Figur alternieren und daraus ist *anschaulich ganz klar, daß sie sich innerhalb mindestens einmal überkreuzen müssen*; in der Tat kann man das – und das ist der Inhalt des Gaußschen Beweises – mit Hilfe der Stetigkeit der Kurven exakt schließen. Der wesentliche womit die Existenz einer Wurzel der Gleichung $f = 0$ bewiesen ist. Zu diesem Ende erweist es sich nun als genügend, den Verlauf beider Kurven ins Unendliche hin, d. h. in beliebig weiter Entfernung vom Nullpunkt zu untersuchen.

Wird der absolute Betrag r von z sehr groß, so kann man in $f(z)$ die niederen Potenzen von z gegen z^n vernachlässigen, und sieht so, daß sich $f(z)$ asymptotisch

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

nähert, wo unter Benutzung der Moivreschen Formel sogleich die Polarkoordinaten r, φ in der x-y-Ebene eingeführt sind. Dem entnehmen wir sofort, daß u und v sich asymptotisch den Funktionen

$$r^n \cos n\varphi \quad \text{bezw.} \quad r^n \sin n\varphi$$

nähern, und daher wird der schließliche Verlauf der Kurven $u = 0$, $v = 0$ im Unendlichen in erster Annäherung dargestellt durch:

$$\cos n\varphi = 0 \quad \text{bezw.} \quad \sin n\varphi = 0.$$

Nun wird die Kurve $\sin n\varphi = 0$ gebildet durch diejenigen n Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x-Achse die Winkel $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \dots \frac{(n-1)\pi}{n}$ bilden, während $\cos n\varphi = 0$ aus den n Halbierungsgeraden der entstehenden Winkel be-lassen. Ich kann da bald mit dem wichtigsten Theorem, dem

A. Fundamentalsatz der Algebra

beginnen, der bekanntlich aussagt, dass jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades im allgemeinen n Wurzeln hat, oder genauer gesagt, dass jedes Polynom $f(x)$ n^{ten} Grades sich in n Linearfaktoren zerlegen lässt.

Im Grunde benutzen alle Beweise dieses Satzes die geometrische Interpretation der komplexen Grössen $x + iy$ in der x-y-Ebene. Ich will Ihnen hier den Gedankengang des ersten Gaussschen Beweises von 1799 angeben, der sich anschaulich einkleiden lässt, freilich ist die ursprüngliche Darstellung bei Gauss ganz anders: – Liegt das Polynom

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

vor, so können wir schreiben:

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

wo u, v reelle Polynome der beiden reellen Variabelen x, y sind. Der Grundgedanke des Gaussschen Beweises ist nun, die beiden Kurven

$$u(x\,y) = 0 \text{ und } v(x\,y) = 0$$

in der x-y-Ebene zu betrachten, und zu zeigen, dass sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben müssen; für diesen Schnitt $x \mid y$ ist dann $f(x + iy) = 0$, kurve gleichzeitig auch auf der Doppelkurve. Was endlich den isolierten Ast der Doppelkurve anlangt, so verläuft er gänzlich im Raumteil III, und ist dadurch ausgezeichnet, daß je 2 der dort vorhandenen komplexen Wurzeln zu einer komplexen Doppelwurzel zusammenfallen; beide Doppelwurzeln sind natürlich einander konjugiert.

Sie finden nun alle hier aufgezählten möglichen Fälle an unserem Modell genau realisiert. In der Skizze (S. 226) bildet das Innere der Fläche rechts von der Doppelkurve den Raumteil I, links den Teil III, das Äußere aber den Teil II. Sie werden sich danach an der Hand des folgenden Schemas für die Zahl der reellen Wurzeln leicht völlig orientieren können:

	I (4 Wurzeln reell)	II (2 Wurzeln reell)	III (0 Wurzeln reell)
Diskrimin.-Fläche:	2 + (2)		(2)
Rückkehrkurve:	1 + (3)		
Doppelkurve:		(2) + (2)	(2 imag. Doppelw.)
Spitze:		(4)	

Wir beenden damit den ersten Teil unserer algebraischen Betrachtungen und wollen jetzt

II. Gleichungen im Gebiete komplexer Größen

behandeln, wobei es uns natürlich wieder nur auf die Hervorhebung solcher Dinge ankommt, die sich mehr, als das meist geschieht, geometrisch anschaulich darstellen gehen nun wiederum ineinander über durch Fälle mit 2 reellen Doppelwurzeln, symbolisch: (2)+(2); die Punkte, für die so zwei Paare von Wurzeln zusammenrücken, müssen gleichzeitig zwei Mänteln der Diskriminantenfläche, also dem nicht isolierten Ast ihrer Doppelkurve angehören. Demnach zerfällt die Diskriminantenfläche in zwei durch einen Ast der Doppelkurve von einander getrennte Teile, deren einer 2 + (2) die Raumgebiete I und II trennt, während der andere (2) die Gebiete II, III scheidet. Um nun zu sehen, wie die Rückkehrkurve dann liegt, bemerken wir, daß für einen Punkt dieser wegen ihrer Eigenschaft als Rückkehrkurve 3 reelle Tangentialebenen in eine (die Schmiegungsebene) zusammenfallen, so daß wir den Fall einer dreifachen und einer einfachen reellen Wurzel: 1 + (3) haben; dieser kann nur aus 2 + (2) entstehen, indem noch eine der einfachen Wurzeln der Doppelwurzel gleich wird, und so folgt, daß die Rückkehrkurve ganz auf dem ersten Teile 2 + (2) der Fläche verlaufen muß. Nur in der Spitze der Rückkehrkurve ($x = y = z = 0$) haben wir eine vierfache reelle Wurzel, und das kann auch durch Zusammenrücken der beiden Doppelwurzeln aus dem Falle (2)+(2) entstehen. In der Tat liegt die Spitze 0 der Rückkehrzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezw. $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ vor, so kann man jedenfalls $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch lauter reelle voneinander verschiedene Wertsysteme der Summe Null stetig bezüglich in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ überführen; entsprechend geht dann die eine Gleichung stetig durch lauter Gleichungen desselben Typus in die zweite über, d. h. alle Gleichungen des Typus I bilden ein zusammenhängendes Kontinuum und dasselbe gilt auch für die anderen beiden Typen. An unserem Modell muß sich das so zeigen, daß der Raum in 3 in sich zusammenhängende Teile zerfällt, deren Punkte den Gleichungen je eines Typus entsprechen. Betrachten wir nun die Uebergangsfälle zwischen diesen 3 Typen: I geht in II über durch Gleichungen, die 2 getrennte reelle und eine doppeltzählende reelle (= 2 zusammenfallende) Wurzeln haben, was wir symbolisch durch 2 + (2) andeuten; ebenso haben wir zwischen II und III den Uebergangsfall einer reellen Doppelwurzel und zweier komplexer Wurzeln, was (2) andeuten möge. Beiden Typen müssen in unserem räumlichen Bilde Stücke der Diskriminantenfläche selbst entsprechen, die ja alle Gleichungen mit zusammenfallenden Wurzeln überhaupt repräsentirt, und zwar überlegt man ähnlich wie vorhin, daß jedem ein in sich zusammenhängendes Stück der Fläche entsprechen muß. Diese beiden Gruppen 2 + (2) und (2) einer Schmiegungsebene als scheinbarer Wendepunkt der Kurve – und umgekehrt. Die reellen Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind also schließlich die Parameter der scheinbaren Wendepunkte der Normkurve bei Betrachtung vom Raumpunkte $x|y|z$ aus.

Nun ist es freilich für den in der Betrachtung räumlicher Kurven nicht sehr Geübten recht schwer, am Modell die Schmiegungsebenen und scheinbaren Wendepunkte der Kurve wirklich zuverlässig zu erkennen. Mit unmittelbarer Deutlichkeit aber erläutert das Modell den nächsten, wichtigsten Punkt, die Einteilung sämtlicher biquadratischer Gleichungen nach der Anzahl ihrer reellen Wurzeln. Sehen wir zu, was wir da überhaupt für Fälle aus der abstrakten Betrachtung der Gleichung erwarten dürfen. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die 4 Wurzeln der reellen biquadratischen Gleichung (4), so ist wegen des Verschwindens des Koeffizienten von t^3 notwendig $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$. Was die Realität dieser Wurzeln angeht, so sind offenbar folgende 3 Hauptfälle möglich:

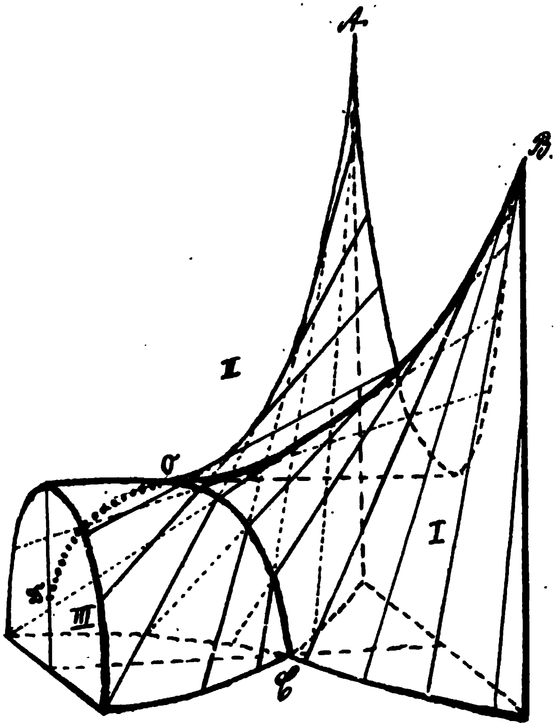
I. 4 reelle Wurzeln.

II. 2 reelle, 2 konjug. komplexe Wurzeln.

III. 0 reelle, 2 Paare konjug. kompl. Wurzeln.

Liegen nun zwei Gleichungen des Typus I mit den Wurvon Doppelkurven sowohl als Schnitte reeller Mäntel erkennbar sein; als auch isoliert im Raume verlaufen können, wo man sie dann als reelle Schnitte imaginärer Mäntel der Fläche aufzufassen hat; die entsprechende ebene Erscheinung, daß neben den als Schnitte reeller Kurvenzweige auftretenden gewöhnlichen Doppelpunkten algebraischer Kurven es auch die als Schnitte imaginärer Teile scheinbar isoliert liegenden Doppelpunkte gibt, kennt ja jeder.

Vergegenwärtigen wir uns nun im einzelnen, wie die so gewonnene Fläche mit ihrer Rückkehrkurve, der Wendekurve, alles uns leisten kann. Wir denken uns die Wendekurve mit ihrer Skala versehen, oder besser, wir schreiben jeder ausgespannten Tangente ihren Parameterwert t an, der auch ihrem Berührungspunkt angehört. Gibt uns nun jemand eine biquadratische Gleichung mit bestimmten Koeffizienten x, y, z, so haben wir nur von dem zugehörigen Raumpunkte $x \mid y \mid z$ an die Wendekurve die Schmiegungsebenen, oder – was dasselbe ist – an die Diskriminantenfläche die Tangentialebenen zu legen, um in den Parametern der Berührungspunkte mit der Kurve bezw. der Tangenten daselbst die reellen Wurzeln zu haben. Da die Schmiegungsebene die Kurve berührt und schneidet, so projiziert sich von $x \mid y \mid z$ aus betrachtet, jeder Berührungspunkt aber auch wirklich schön und brauchbar wird, daß es den ganzen interessierenden Verlauf der Fläche und ihrer Rückkehrkurve übersichtlich darstellt, wie wir es hier vor uns sehen, das ist nur durch längere Versuche und sehr große Geschicklichkeit erreichbar. Die nebenstehende Skizze stellt die Fläche mit ihren Geraden dar; A O B ist die Rückkehrkurve (vgl. die Fig. S. 222).



Sie sehen nun an dem Modell eine *Doppelkurve* (C O D) wahr, *längs deren sich zwei Mäntel der Fläche durchsetzen*; das ist einfach die folgende Parabel der y-Ebene:

$$y = 0 \qquad z - \frac{x^2}{4} = 0.$$

Von dieser Parabel erscheint aber *nur die eine Hälfte* (C O), und zwar die für $x < 0$, als Durchdringung reeller Mäntel, während *die andere isoliert* im Raume verläuft. Diese Erscheinung ist keineswegs überraschend für den, der gewohnt ist, die Theorie der algebraischen Flächen mit konkreten geometrischen Vorstellungen zu begleiten; da ist es nämlich ganz geläufig, daß *reelle Aeste*

Ueber die Bedeutung dieser Formel mache ich für die mit dem Gegenstande näher Vertrauten noch folgende Bemerkungen: Die in den beiden Klammern stehenden Ausdrücke sind nichts, als die Invarianten der zu Grunde liegenden biquadratischen Gleichung in reduzierter Form:

$$t^4 + x t^2 + y t + z = 0,$$

die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine so große Rolle spielen, und die man dort allgemein mit g_2 und g_3 bezeichnet. Die linke Seite unserer Flächengleichung $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ ist bekanntlich die Diskriminante der biquadratischen Gleichung, die durch ihr Verschwinden das Auftreten einer Doppelwurzel anzeigt. Unsere abwickelbare Fläche ist also nichts als die Diskriminantenfläche der biquadratischen Gleichung, d. h. die Gesamtheit der Punkte, für die diese eine doppelte Wurzel hat.

Nach diesen theoretischen Erörterungen hat die Konstruktion eines Fadenmodelles unserer Fläche prinzipiell keine Schwierigkeit mehr: man bestimme aus der Parameterdarstellung etwa die Punkte, an denen die darzustellenden Tangenten gewisse feste Ebenen durchstoßen, und spanne dann zwischen diese durch einen Holz- oder Pappkasten realisierten Ebenen passende Fäden ein. Daß das Modell dann

Diese Fläche ist es nun, die Sie in dem genannten Modell des Herrn Hartenstein dargestellt sehen, und zwar sind ihre geraden Linien als Fäden ausgespannt. — Diese Parameterdarstellung der Fläche liefert bereits die besten Anhaltspunkte für ihre Behandlung und wirkliche Herstellung; wir folgen eigentlich nur einer alten Gewohnheit, wenn wir noch nach der Gleichung der Fläche selbst fragen. Wir erhalten diese Gleichung, indem wir aus (7) t und ρ eliminieren. Das einfachste Verfahren dazu will ich Ihnen hier angeben, ohne dass ich jedoch an dieser Stelle im einzelnen ausführen kann, wie man darauf kommt, und was die einzelnen Schritte ihrem inneren Wesen nach bedeuten. Wir bilden nämlich aus den Formeln (7) die Kombinationen:

$$Z + \frac{X^2}{12} = 12\rho^2 t^2$$
$$\frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} = 8\rho^3 t^3,$$

die beide auf der Kurve selbst ($\rho = 0$) verschwinden, und gleich 0 gesetzt, zwei der schon oben aufgeführten durch die Fläche gelegten speziellen Flächen darstellen. Zwischen diesen Gleichungen können wir leicht das Produkt $\rho \cdot t$ eliminieren und finden als Gleichung der abwickelbaren Fläche:

$$\left(Z + \frac{X^2}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216}\right)^2 = 0;$$

sie ist also eine Fläche 6. Ordnung.

liche in t befriedigt. Aus ihr und dem kubischen Zylinder stellen wir noch folgende lineare Kombination her, die wiederum eine durch die Grundkurve gehende Fläche dritten Grades darstellt:

$$\frac{xz}{6} - \frac{y^2}{16} - \frac{x^3}{216} = 0.$$

Betrachten wir jetzt die abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkurve die Grundkurve ist, und die wir, von dieser aus, als Inbegriff aller ihrer Tangenten definieren können. Nun wird für eine beliebige Raumkurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

die Tangente im Punkte t durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t) + \rho\varphi'(t) \qquad y = \psi(t) + \rho\cdot\psi'(t) \qquad z = \chi(t) + \rho\chi'(t)$$

gegeben, (wo ρ ein Parameter), denn ihre Richtungscosinus gegen die Achsen verhalten sich bekanntlich wie die Differentialquotienten der Koordinaten der Kurve nach t. Betrachten wir nun t als variabel, so haben wir in diesen Gleichungen mit den 2 Parametern t, ρ die Darstellung der abwickelbaren Tangentenfläche; alles das sind bekannte Ueberlegungen der Raumgeometrie. Für unsere Kurve (5) lautet diese Darstellung der Tangentenfläche, wenn wir ihre Koordinaten zum Unterschiede von den Kurvenkoordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$(7) \qquad \begin{cases} X = -6(t^2 + 2\rho t) \\ Y = 8(t^3 + 3\rho t^2) \\ Z = -3(t^4 + 4\rho t^3) \end{cases}$$

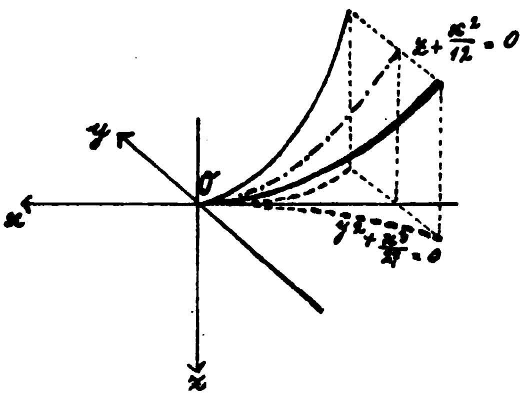
Um uns nun über sie näher zu orientieren, betrachten wir einige einfache Flächen, die sich durch sie legen lassen. Zunächst genügen die Ausdrücke (5) identisch in t der Gleichung

$$z + \frac{x^2}{12} = 0,$$

d. h. unsere Normkurve liegt auf dem durch diese Gleichung dargestellten parabolischen Zylinder 2. Ordn., dessen Erzeugende der y-Achse parallel sind. Ebenso aber besteht die Relation:

$$\frac{y^2}{8} + \frac{x^3}{27} = 0,$$

so daß auch dieser einfache kubische Zylinder mit der z-Achse parallelen Erzeugenden durch unsere Normkurve geht; sie ist übrigens der gesamte im Endlichen gelegene Schnitt beider Zylinder.



Man kann sich danach leicht ein ungefähres Bild des Verlaufes der Normkurve machen: sie wird eine zur x-z Ebene symmetrisch gelegene doppelt gekrümmte Kurve mit einer Spitze im Nullpunkt.

Ferner aber geht noch folgende Fläche 2. Grades:

$$\frac{x \cdot z}{6} - \frac{3y^2}{64} = 0$$

durch unsere Normkurve, denn auch das ist durch (5) iden-

Das Umhüllungsgebilde dieser Ebenen ist die Gesamtheit der Geraden, die jede Ebene $f(t)=0$ mit der benachbarten $f(t+dt)=0$ gemein hat, das ist die abwickelbare Fläche, deren Gleichung man durch Elimination von t aus $f(t)=0$ und $f'(t)=0$ erhält. Wir müssen nun aber, um die Normkurve zu erhalten, das Schmiegungsgebilde der Ebenenschar betrachten, d.h. den Ort aller Punkte, in denen 3 aufeinander folgende Ebenen sich schneiden; das ist bekanntlich die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche, deren Koordinaten sich als Funktionen von t aus den 3 Gleichungen $f(t)=0$, $f'(t)=0$, $f''(t)=0$ berechnen. Hier lauten nun diese Gleichungen

$$\begin{aligned} t^4 + x t^2 + y t + z &= 0 \\ 4t^3 + x \cdot 2t + y &= 0 \\ 12 t^2 + x \cdot 2 &= 0, \end{aligned}$$

und man findet aus ihnen:

$$(5) \qquad x = -6t^2, \quad y = 8t^3, \quad z = -3t^4;$$

das ist die Punktgleichung der Klassennormkurve von (4), deren Ebenengleichung nach (3^a) lautet:

$$(6) \qquad w = t^4, \quad u = t^2, \quad v = t.$$

Beide Darstellungen sind in t vom vierten Grade; die Normkurve hat also sowohl die Ordnung als auch die Klasse 4.

Digitized by Google

te mit der Normkurve als scheinbare Schnitte des Fadens mit der Schablone, während man durch das Visierloch blickt, unmittelbar beobachten; ihre Parameterwerte, das sind die gesuchten Wurzeln der Gleichung, liest man gleichzeitig an der auf der Schablone angebrachten t-Skala der Normkurve ab. Ob der so geschilderte Apparat wirklich praktisch brauchbar ist, hängt natürlich wesentlich von seiner sorgfältigen mechanischen Ausführung ab.

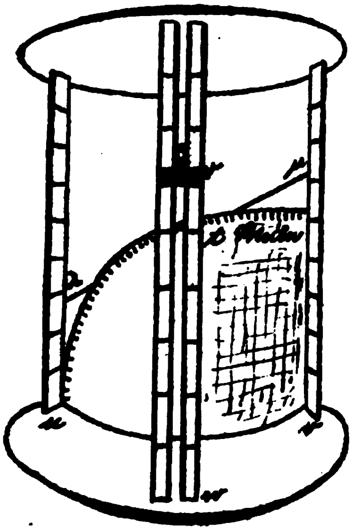
Für die zweite Methode haben wir ein von Herrn Hartenstein als Staatsexamensarbeit angefertigtes Modell. Es bezieht sich auf die sog. reduzierte Form der Gleichung 4. Grades:

$$(4) \qquad t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0,$$

auf die man bekanntlich jede biquadratische Gleichung unmittelbar bringen kann. Ich will für sie jene Methode noch einmal ein wenig modifiziert darstellen, wie ich das für die dreiparametrige Gleichung oben bereits tat (S. 210.): Wir haben ein System von einfach unendlich vielen Ebenen zu betrachten, deren Ebenenkoordinaten in (3a) gegeben sind, während sich ihre Punktgleichungen im vorliegenden Falle schreiben würden:

$$f(t) \equiv t^4 + x t^2 + y t + z = 0.$$

zur Konstruktion eines Apparates zur numerischen Auflösung von Gleichungen benutzt. Es ist ein Messinggestell, an dem Ihnen 3 mit Skalen versehene vertikale Stäbe auffallen, und in das wir die als Schablonen ausgeschnittenen Normkurven der auf 4 Glieder reduzierten Gleichungen 3., 4. oder 5. Grades einsetzen können. Hier ist abweichend von unserer Auseinandersetzung kein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt, sondern das Koordinatensystem ist gerade so bestimmt, daß die zugehörigen Ebenenkoordinaten, d. h. die Koeffizienten u, v, w der in der Form (2) angesetzten Ebenengleichung, gerade die Abschnitte sind, die die betr. Ebene auf den Skalen der 3 Vertikalstäbe hervorruft und die man dort ablesen kann. Um nun eine Fixierung einer bestimmten Raumebene $u = \lambda$, $v = \mu$, $w = \nu$ zu ermöglichen, ist an dem vorderen w-Stabe ein Visier angebracht, das man auf die Stelle ν der Skala einstellt, während man die Stellen λ, μ der Skala des u- bzw. v-Stabes durch einen gespannten Faden verbindet. Die Visierstrahlen nach diesem Faden bilden dann unsere Ebene, und man kann deren Schnitt-



$$(2^{b}) \qquad u = \lambda \qquad v = \mu \qquad w = \nu;$$

dann besagt (1), daß die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung identisch mit den Parameterwerten der reellen Schnitte der Normkurve (2^{a}) mit der Ebene (2^{b}) sind.

Gehen wir nun dualistisch vor, so ist zu nehmen:

$$(3^{a}) \qquad w = t^{k} \qquad u = t^{m} \qquad v = t^{n};$$

dies sind einfach unendlich viele Ebenen, die wir als Schmiegungsebenen einer bestimmten wieder mit einer Skala von Parameterwerten t versehenen Raumkurve auffassen können; gemäß dieser Definition durch Ebenenkoordinaten können wir diese als Klassen-Normkurve der vorigen durch ihre Punkte festgelegten Ordnungs-Normkurve entgegenstellen. Betrachten wir jetzt neben ihr den Punkt

$$(3^{b}) \qquad x = \lambda \qquad y = \mu \qquad z = \nu,$$

so folgt, daß die reellen Wurzeln von (1) identisch sind mit den Parametern der Schmiegungsebenen an die Klassennormkurve (3^{a}), die durch den Punkt (3^{b}) gehen.

Es kommt nun darauf an, beide Deutungen an konkreten Beispielen näher durchzudenken; wir besitzen in unserer Sammlung für beide Modelle, die ich Ihnen jetzt vorführen will.

Die erste Darstellung hat Prof. Mehmke in Stuttgart der, anlässlich der von der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1893 in München veranstalteten Ausstellung herausgegeben, noch heute das beste Hilfsmittel zur Orientierung auf dem Gebiete mathematischer Modelle ist.

3. <u>Gleichungen mit 3 Parametern λ, μ, ν.</u>

Wir wollen hier bald die spezielle viergliedrige Gleichung:

$$(1) \qquad \underline{t^{r} + \lambda t^{m} + \mu t^{n} + \nu = 0}$$

behandeln; das Verfahren ist ganz analog dem vorigen, nur daß wir jetzt <u>den dreidimensionalen Raum statt der Ebene</u> heranziehen. Wir stellen also neben die Gleichung die Bedingung der Raumgeometrie, daß ein Punkt $x|y|z$ und eine Ebene mit den Ebenenkoordinaten $u|v|w$ „in vereinigter Lage" sich befinden (d. h. daß die Ebene den Punkt enthält).

$$(2) \qquad z + ux + vy + w = 0 \quad \text{oder}$$

$$(3) \qquad w + xu + yv + z = 0.$$

Diese Gleichung wollen wir nun in der einen oder anderen Reihenfolge mit (1) identifizieren, und erhalten dann genau wie vorhin zwei einander duale Deutungen.

Zunächst setzen wir also

$$(2^{a}) \qquad z = t^{r}, \; x = t^{m}, \; y = t^{n},$$

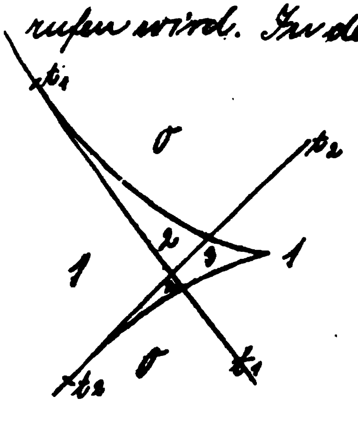
und erhalten dadurch eine bestimmte <u>Raumkurve</u>, die <u>Normkurve der viergliedrigen Gleichung, versehen mit einer Skala der Werte t</u>. Ferner setzen wir der Normkurve 2 Tangenten dieser Art verloren gehen, wie unmittelbar ersichtlich ist, so entsteht das *angegebene Bild der Gebiete, die Gleichungen mit 3, 2, 1, 0 reellen zwischen t_1 und t_2 gelegenen Wurzeln entsprechen.* Um den *ungeheuren Nutzen der graphischen Methode* einzusehen, brauchen Sie nur einmal zu versuchen, diese Einteilung der kubischen Gleichungen in abstracto zu schildern, ohne irgendwie an die Raumanschauung zu appellieren; das wird eine ganz unverhältnismässig grosse Zeit erfordern. Auch der Beweis, der hier durch einen Blick auf die Figur klar ist, wird dann nicht einfach sein.

Was nun die *Beziehung dieser geometrischen Methode zu den bekannten algebraischen Kriterien von Sturm, Cartesius, Budan – Fourier* angeht, so will ich hier nur bemerken, dass die geometrische Methode für den vorliegenden Fall sie alle umfasst. Näher ausgeführt finden Sie diese interessanten Beziehungen in meiner Arbeit „*Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischen Gleichungen*" in *W. Dycks Katalog mathematischer Modelle.*[1] Ich benutze gern die Gelegenheit, Sie auf diesen Katalog hinzuweisen,

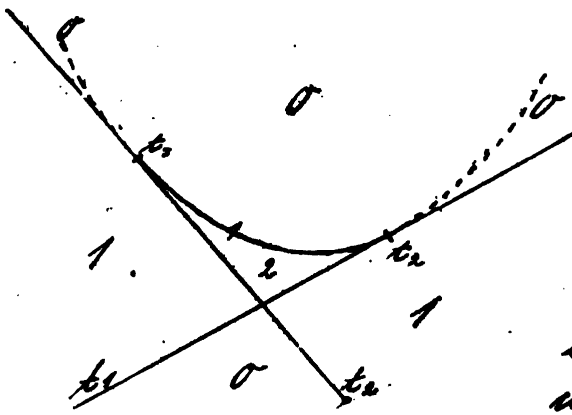
1) Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (München 1892) sowie Nachtrag dazu (München 1893).

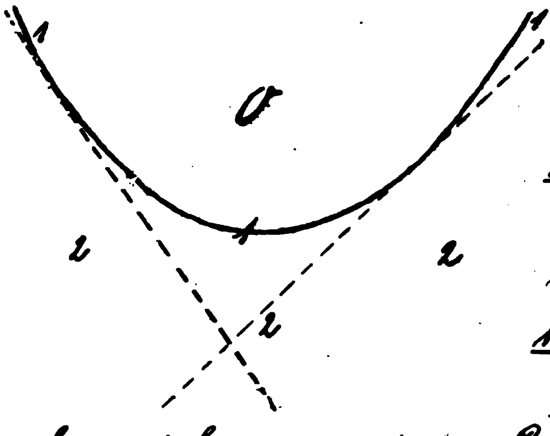
Tangente geht eine verloren, die dann die Parabel außerhalb des Segments berührt; durch jeden Punkt in dem sichelförmigen von der Parabel und je einer Tangente begrenzten Streifen geht keine den Bogen (t_1, t_2) berührende Tangente, und innerhalb der Parabel gibt es überhaupt keine reellen Tangenten. Die beiden Parabelbögen $t \leq t_1$ und $t \geq t_2$ sind also für die entstehende Teilung der Ebene unwesentlich; es bleiben nur die in der Figur ausgezogenen Linien, vermöge deren wir durch die angeschriebenen Zahlen eine *genaue Uebersicht über die Mannigfaltigkeiten der quadratischen Gleichungen erhalten, die 2, 1, 0 reelle, zwischen t_1 und t_2 gelegene Wurzeln haben.*

Genau so verfahren wir bei der *kubischen Gleichung:* Nehmen wir etwa $t_1 > 0$, $t_2 < 0$. Wir ziehen wiederum die Tangenten mit diesen Parameterwerten und brauchen nur die Gebietseinteilung zu betrachten, die durch sie und das zwischen t_1, t_2 gelegene Stück der Normkurve hervorgerufen wird. In dem viereckigen Gebiet an der Spitze gibt es dann für jeden Punkt wirklich noch drei den Bogen zwischen t_1, t_2 berührende reelle Tangenten. Berücksichtigt man, daß beim Ueberschreiten jeder Tangente 1, beim Ueberschreiten



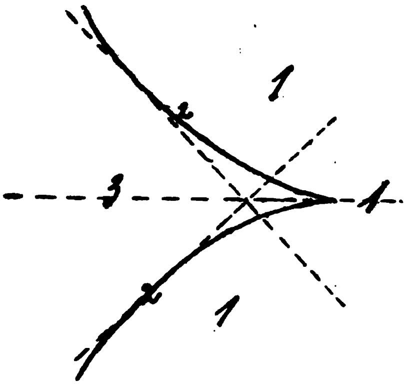
Die Figuren werden nun noch viel amüsanter, und liefern wesentlich mehr, wenn wir, wie in der Algebra auch sonst üblich, *für die Wurzeln noch Einschränkungen* einführen, insbesondere *nach allen reellen Wurzeln fragen, die in einem gegebenen Intervalle $t_1 \leq t \leq t_2$ liegen*; diese Frage wird bekanntlich *allgemein durch den Sturmschen Satz* beantwortet. Wir können nun unsere Figuren leicht so vervollständigen, daß sie eine befriedigende, übersichtliche Lösung auch dieser allgemeinen Frage geben. Wir nehmen dazu einfach *die den Parameterwerten t_1, t_2 entsprechenden Tangenten an der Normkurve hinzu* und betrachten die entstehende Zerlegung der Ebene in Felder. Machen wir das zunächst wieder für die *quadratische Gleichung*, so kommt es darauf an die *Zahl der Tangenten festzustellen, die den Bogen der Parabel zwischen t_1 und t_2 berühren*. In dem Dreieck zwischen diesem Parabelbogen und den beiden Tangenten gibt es deren 2 durch jeden Punkt, beim Ueberschreiten jeder





zählende Tangente; so ist die Normkurve selbst übrigens auch allgemein der Ort der Punkte, für die 2 Wurzeln der Gleichung zusammenfallen, so daß wir sie auch die Diskriminantenkurve nennen können.

Bei der kubischen Gleichung gehen von einem Punkte innerhalb des Hakens der Normkurve 3 Tangenten an sie; denn für einen Punkt der Mittellinie ist das aus Symmetriegründen klar,



und die Anzahl kann sich nicht ändern, wenn man den Punkt variiert, ohne die Kurve zu überschreiten. Kommt $x|y$ auf die Kurve, so fallen zwei Wurzeln zusammen, und rückt er in das Gebiet außerhalb der Kurve, so werden diese Wurzeln imaginär und es bleibt nur eine reelle Wurzel. In der Spitze der Normkurve endlich haben wir nur 1 dreifache Tangente, so daß die entsprechende Gleichung ($t^3 = 0$) nur 1 dreifache Wurzel hat. Die Figur läßt diese Gruppierung mit einem Blick übersehen.

sich als besonders zweckmäßig für die wirkliche Lösung von Gleichungen erweist. Auch im Schulunterricht dürfte die Berücksichtigung der einen oder anderen dieser Figuren gelegentlich sich empfehlen.

Vergleichen wir nun die beiden bisher entwickelten Methoden miteinander, so zeigt sich, daß für einen bestimmten, sehr wichtigen Zweck die zweite einen wesentlichen Vorteil bietet – dann nämlich, wenn man eine anschauliche Vorstellung aller Gleichungen eines bestimmten Typus erhalten will, die eine gegebene Anzahl reeller Wurzeln besitzen. Solche Gesamtheiten werden bei der ersten Methode durch Systeme von Geraden, bei der zweiten aber durch Gebiete von Punkten repräsentiert, und diese können wir kraft einer Eigenart unserer geometrischen Anschauung oder Gewöhnung nun einmal wesentlich leichter auffassen, als jene.

Was wir in dieser Richtung alles erreichen können, will ich bald am Beispiele der quadratischen Gleichung näher ausführen; da gehen von allen Punkten innerhalb der Parabel keine, von allen außerhalb aber zwei reelle Tangenten an sie, so daß diese Gebiete die Mannigfaltigkeiten aller Gleichungen mit 0 oder 2 Wurzeln repräsentieren. Für alle Punkte der Parabel selbst gibt es nur eine einzige, doppelt

$$\varphi(t) = t^m + x t^n + y = 0$$

dargestellt. Um nun die Gleichung der Normkurve in Punktkoordinaten zu finden, hat man bekanntlich diese Gleichung mit der durch Differentiation nach dem Parameter t entstehenden

$$\varphi'(t) = m t^{m-1} + n x t^{n-1} = 0$$

zusammenzustellen und t zu eliminieren; denn die Normkurve wird als Enveloppe des Geradensystems durch die Schnitte je zweier aufeinander folgender Geraden (t und $t + dt$) gebildet. Drücken wir, statt t zu eliminieren, aus beiden Gleichungen x, y durch t aus, so folgt:

(5a) $$x = -\frac{m}{n} t^{m-n}, \quad y = \frac{m-n}{n} t^m,$$

und das ist die Punktgleichung unserer Normkurve.

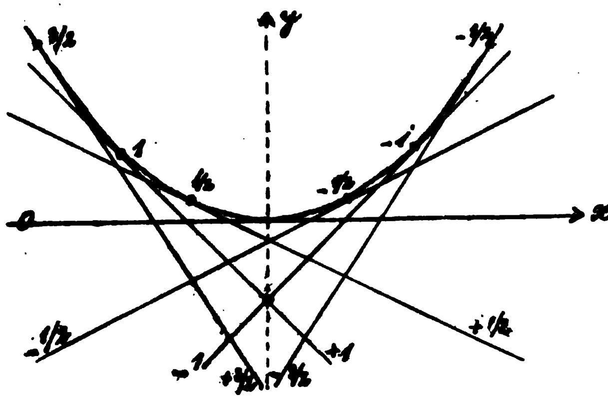
Für die Normkurven der als Beispiel behandelten quadratischen und kubischen Gleichung erhalten wir so:

$$x = -2t \qquad y = t^2 \quad \text{bzw.}$$
$$x = -3t^2 \qquad y = 2t^3,$$

und das sind in der Tat die oben gezeichneten Kurven.

Ich weise ausdrücklich darauf hin, daß diese Methode von Prof. Runge in seinen Vorlesungen und Uebungen praktisch gehandhabt wird, und daß sie gehört als Normkurve die Umhüllungskurve der Geraden

$$v = t^2, \; u = t,$$



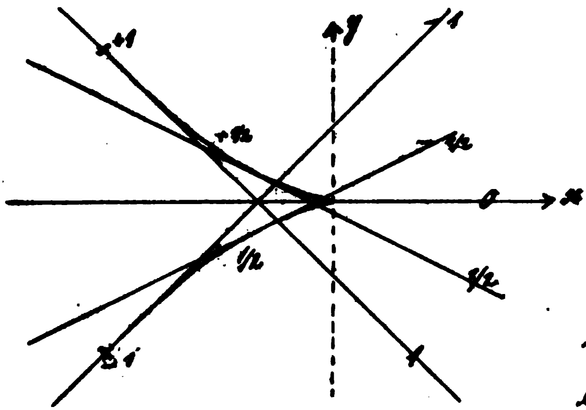
und das wird wiederum eine Parabel mit dem Scheitel im Nullpunkt. Die Figur zeigt sogleich die zu $\lambda | \mu$ gehörigen reellen Wurzeln als Parameter der Tangenten vom Punkte $\lambda | \mu$ aus an die Parabel.

Für die kubische Gleichung

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

wird die Normkurve

$$v = t^3 \qquad u = t$$



eine Kurve 3. Klasse, die im Nullpunkte eine Spitze hat, wie das die Figur näher andeutet.

Wir können diese Methode noch etwas anders darstellen. Betrachten wir nur die sog. trinomische Gleichung

$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0,$$

so ist das Tangentensystem der Normkurve durch die den Parameter t enthaltende Gleichung denn wir setzen:

$$(4^a) \qquad v = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \qquad u = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

$$(4^b) \qquad x = \lambda \qquad y = \mu .$$

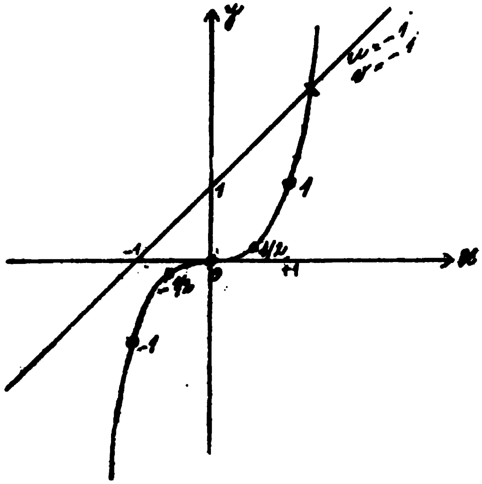
(4^a) stellt bei variablem t eine Schar gerader Linien dar, die eine wohlbestimmte Kurve umhüllen, die *„Nomokurve" von (1)* in der neuen Deutung; es ist eine *rationale Klassenkurve*, insofern sie in Geradenkoordinaten durch rationale Funktionen eines Parameters dargestellt ist. Jede Tangente und somit auch ihr Berührungspunkt entsteht durch einen bestimmten Wert von t, so daß wir wiederum eine *Skala auf der Nomokurve* erhalten. Indem wir hinreichend viele Tangenten nach (4^a) zeichnen, bekommen wir Kurve und Skala mit jeder gewünschten Genauigkeit. Für ein bestimmtes λ, μ sagt nunmehr die Gleichung (1) aus, daß die Tangente t der Nomokurve (4^a) durch den durch (4^b) dargestellten Punkt $\lambda | \mu$ geht; *wir erhalten also alle reellen Wurzeln von (1), indem wir die Parameterwerte t ablesen, die zu allen durch den Punkt $x = \lambda \,|\, y = \mu$ gehenden Tangenten der Nomokurve gehören.*

Wir betrachten zur Erläuterung wieder dieselben Beispiele. Zur *quadratischen Gleichung*

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

zeichneten Parabel auch alle möglichen quadratischen Gleichungen approximativ lösen. Diese Methode empfiehlt sich auch wirklich für praktische Zwecke, wenn es nur auf eine geringe Genauigkeit ankommt.

Ähnlich kann man die sämtlichen kubischen Gleichungen behandeln, die man ja bekanntlich stets durch eine lineare Transformation auf die „reduzierte Form":



$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

bringen kann; hier kommt als Normkurve die kubische Parabel

$$y = t^3\ ,\quad x = t \quad \text{oder} \quad y = x^3$$

in Betracht, die nebenstehend skizziert ist. Auch diese Methode scheint mir auf der Schule wohl verwendbar; die Schüler haben am eigenen Zeichnen solcher Kurven gewiß die größte Freude.

B.) Die zweite Methode der Deutung von (1) entsteht aus der ersten, indem wir das Prinzip der Dualität anwenden, d.h. Punkt- und Linienkoordinaten vertauschen. Dann schreiben wir (2) in umgekehrter Reihenfolge:

$$v + x.u + y = 0$$

und bringen sie so mit (1) zur Übereinstimmung, in-

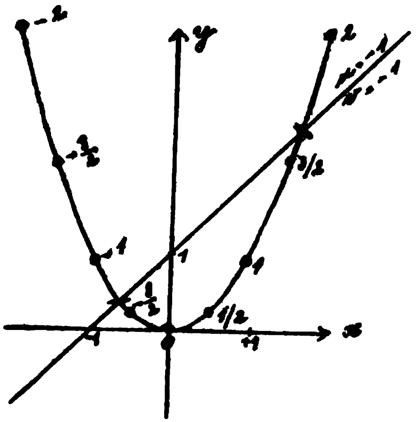
Für jedes bestimmte Parameterpaar λ, μ stellt ferner (3a) eine <u>Gerade</u> der Ebene dar, und (1) bedeutet nach dem oben gesagten, daß der Punkt t der Normkurve auf dieser Geraden liegt; <u>wir erhalten also alle reellen Wurzeln von (1), indem wir alle reellen Schnitte der Normkurve mit dieser Geraden auffassen, und ihre Parameterwerte auf der Skala der Kurve ablesen.</u>

Zur näheren Erläuterung diene die <u>quadratische Gleichung</u>

$$t^2+\lambda t+\mu=0.$$

Die Normkurve ist hier

$$y=t^2,\quad x=t\,,\quad \text{oder } y=x^2,$$



d. i. die nebenstehend gezeichnete Parabel mit der angedeuteten Skala, an der man die reellen Wurzeln unserer Gleichung als Schnitte mit der Geraden $y+\lambda x+\mu=0$ sofort ablesen kann. So ergibt die Figur, daß die Wurzeln von $t^2-t-1=0$ zwischen 3/2 und 2 bzw. $-1/2$ und -1 liegen. Der wesentliche Unterschied gegen die frühere Methode ist, daß wir jetzt <u>alle</u> Geraden der Ebene in Betracht ziehen, vorhin nur die <u>horizontalen</u>. Dafür können wir jetzt <u>mit ein und derselben einmal ge-</u>

nen: $(-u)$ ist die trigonometrische Tangente ihres Winkels, gegen die x-Achse, $(-v)$ der Abschnitt, den sie auf der y-Achse ausschneidet. Indem wir, was später besonders wichtig wird, Punkt und Gerade und entsprechend Punkt- und Geradenkoordinaten als gleichberechtigt ansehen, können wir kurz sagen, *die Gleichung $y + ux + v = 0$ bedeutet vereinigte Lage der Geraden $u|v$ und des Punktes $x|y$*, d. h. der Punkt liegt auf der Geraden, die Gerade geht durch den Punkt.

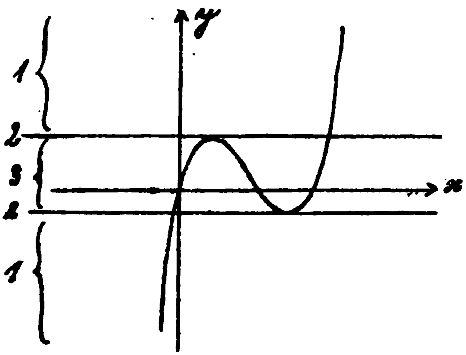
Um nun unsere Gleichung (1) geometrisch zu deuten, bringen wir sie mit (2) zur Übereinstimmung und das kann auf *2 wesentlich verschiedene Arten geschehen*:

A.) Wir setzen:

$$(3^a) \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \qquad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

$$(3^b) \qquad u = \lambda \qquad v = \mu \, .$$

Die Gleichungen (3^a) stellen bei variablem t eine *wohlbestimmte rationale Kurve der x-y-Ebene*, die sog. „*Punktkurve*" *der Gleichung (1)* dar, und da jeder Punkt durch einen bestimmten Wert von t entsteht, können wir uns auf ihr eine *Skala von t-Werten* angebracht denken. Aus (3^a) können wir unmittelbar beliebig viele Punkte der Kurve berechnen, und so die Punktkurve mit ihrer Skala hinreichend genau zeichnen.



Figur ist angenommen, daß $x^2 + ax + b = 0$ reelle Wurzeln hat; man sieht dann, wie die Parallelen sich in solche scheiden, die in 1, und solche, die in 3 reellen Punkten schneiden, während zwei Grenzlagen mit je 1 Doppelwurzel eintreten können.

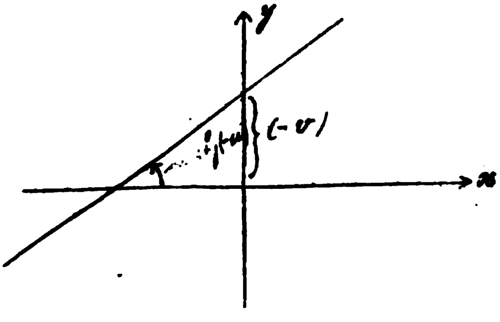
2. Gleichungen mit 2 Parametern.

Hier ist zum graphischen Ansatz der Probleme bereits mehr Kunst nötig, dafür erhalten wir aber auch weitergehende und interessantere Resultate. Wir beschränken uns bald auf lineares Auftreten der beiden Parameter λ, μ, und wollen für die Unbekannte der Gleichung t schreiben; dann handelt es sich also um die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(t) + \lambda \cdot \chi(t) + \mu \cdot \psi(t) = 0$$

wo φ, χ, ψ Polynome in t sind.

Sind nun x, y die gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten einer Ebene, so wird jede Gerade in ihr dargestellt durch eine Gleichung:



$$(2) \qquad y + ux + v = 0,$$

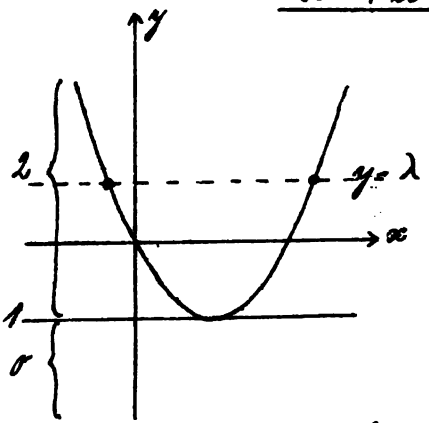
und wir können u, v als Koordinaten der Geraden bezeichist, also bei Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) - \lambda\psi(x) = 0;$$

denn dann wird unsere Kurve $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rational, und ihre Darstellung daher besonders einfach. In diesen Fällen kann man die Methode auch für die Ausführung der numerischen Berechnung der Wurzeln vielfach mit Nutzen anwenden.

Betrachten wir als Beispiel die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$



Wir haben dann in der Kurve $y = x^2 + ax$ eine Parabel und übersehen sofort, für welche Werte von λ die Gleichung 2, 1, 0 reelle Wurzeln hat, entsprechend den Horizontalen, die die Parabel in 2, 1, 0 Punkten schneiden. Die Vorführung einer solchen einfachen und anschaulichen Konstruktion scheint mir auch für die oberen Klassen der Schule sehr geeignet. – Als zweites Beispiel gebe ich die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx - \lambda = 0$, für die wir eine kubische Parabel $y = x^3 + ax^2 + bx$ erhalten; sie hat je nach den Werten a, b verschiedenes Aussehen. In der treten, so daß wir die so recht Mathematik im Sinne unserer Entwicklungsreihe B von vorhin treiben.

Wir nehmen zuerst

I. Reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten

vor, um dann später die komplexen Größen folgen zu lassen. Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Fall, nämlich

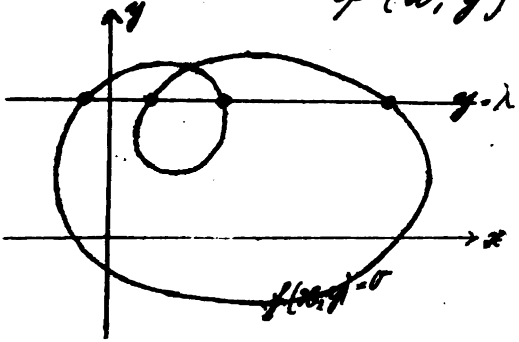
1. Gleichungen, die einen Parameter enthalten.

Ihr Typus ist

$$f(x,\lambda)=0.$$

Wir deuten sie geometrisch am einfachsten, indem wir λ durch eine zweite Variable y ersetzen und

$$f(x,y)=0$$



als Kurve in einer x-y-Ebene auffassen. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Parallelen zur Abscissenachse $y=\lambda$ geben die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x,\lambda)=0$, und wenn wir nur die Kurve angenähert gezeichnet haben – was bei nicht allzu kompliziertem f leicht möglich ist –, übersehen wir durch Verschiebung der Parallelen, wie bei Variation von λ die Anzahl der reellen Wurzeln sich ändert. Besonders am Platze ist dieser Ansatz, wenn f in λ linear

Lehrer beherrschen sollte. Nach der *praktischen Seite* hin, der numerischen Auflösung von Gleichungen, werden sie durch das kleine Buch „*Praxis der Gleichungen*" unseres Prof. *C. Runge* [1] ergänzt, das ich Ihnen nur sehr empfehlen kann.

Wenn ich mich nun zum Thema wende, so bemerke ich vorab, daß ich im Rahmen dieser Vorlesung natürlich *keine systematische Darlegung der Algebra* geben kann; ich kann vielmehr *nur einen einseitigen Ausschnitt* geben, und da ist es das Zweckmäßigste, wenn ich solche Dinge hervorhebe, die anderswo unbillig vernachlässigt werden, und die gerade auch geeignet sind, den Schulunterricht in besonderer Beleuchtung erscheinen zu lassen. Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um einen Punkt gruppieren, nämlich um die *Anwendung der graphischen und überhaupt der geometrisch anschaulichen Methoden auf die Lösung von Gleichungen*. Damit ist ein äußerst umfassendes und beziehungsreiches Kapitel bezeichnet, aus dem ich natürlich auch wieder nur eine Reihe der wichtigsten und interessantesten Sachen herausgreifen kann; wir werden dabei mit den verschiedensten Gebieten in organischen Konnex

1) Samml. Schubert 14. – Leipzig 1900.

schon in der Einleitung der Vorlesung gedacht.

Und nun, meine Herren, genug von diesen Zwischenbetrachtungen; lassen Sie uns zum nächsten großen Abschnitt der Vorlesung übergehen:

Zweiter Hauptteil: Algebra.

Ich darf damit beginnen, daß ich Ihnen einige Lehrbücher der Algebra nenne, um Sie in der sehr umfangreichen vorhandenen Literatur etwas zu orientieren. Zunächst erwähne ich Serret's Cours d'algèbre, der früher auch bei uns sehr viel benutzt wurde, und große Verdienste hat. Heut besitzen wir jedoch zwei große, verbreitete deutsche Lehrbücher: H. Webers „Lehrbuch der Algebra"[1] und E. Nettos „Vorlesungen über Algebra",[2] jeder in 2 Bänden; beide enthalten außerordentlich viele schwierige Dinge und sind überhaupt eigentlich für ein weitergehendes Spezialstudium bestimmt; für das durchschnittliche Bedürfnis der Lehramtskandidaten scheinen sie mir inhaltlich zu umfangreich und wohl auch zu teuer zu sein. Mehr diesem Zwecke angepaßt sind wohl die auch recht bequem lesbaren „Vorlesungen über Algebra" von G. Bauer[3], die kaum über das hinaus gehen, was der

1) 2. Aufl. Braunschweig 1898/99. 2) Leipzig 1896/1900

3) Leipzig 1903.

men, daß eine jede von ihnen, und manchmal gerade ihre Aufeinanderfolge die großen Fortschritte der Wissenschaft zu Stande bringt. Die Mathematik wird sich also nur dann gleichmäßig nach allen Seiten hin fortentwickeln können, wenn *keine der beiden Arten der Untersuchungen vernachlässigt* wird; möge jeder Mathematiker in der ihm zusagenden Richtung arbeiten!

Der *Schulunterricht* aber steht leider – ich deutete es schon an – heute, wie schon seit langer Zeit *unter einseitiger Herrschaft der Richtung A*; eine jede Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts muß also für *eine stärkere Hervorhebung der Richtung B* eintreten. Dabei denke ich vor allem an das Durchdringen der *genetischen Unterrichtsmethode*, an eine stärkere Betonung der *Raumanschauung* als solcher und besonders an die Voranstellung des *Funktionsbegriffs* unter *Fusion der Raum- und Zahlvorstellung*! In den Dienst dieser Tendenz stelle ich auch die gegenwärtige Vorlesung, und das um so mehr, als in den elementarmathematischen Werken, die wir sonst immer zu Rate ziehen, in *Weber-Wellstein, Tropfke, M. Simon*, fast ausschließlich die Richtung A vertreten ist; ich hatte dieser Gegensätze ja gerade auch lesen sich geradezu wie ein gut geschriebener, spannender Roman. Das ist der *der Manier B angepaßte Stil*, während die *Euklidische Darstellung der Manier A ganz wesensverwandt* ist.

Von Deutschen, die auf den genannten Gebieten Großes leisteten, nenne ich noch *Jacobi und Riemann* und füge aus neuerer Zeit *Clebsch* und den Norweger *Lie* hinzu. Sie alle gehören wesentlich der *Richtung B* an, nur ist gelegentlich *ein algorithmischer Einschlag* bei ihnen bemerkbar.

Mit *Weierstraß* tritt *von 1860 an*, wo er seine Vorlesungen in Berlin beginnt, die *Denkweise A* wieder mehr in den Vordergrund; die *Weierstraßsche Funktionentheorie* habe ich ja schon unter A aufgeführt. In gleicher Weise gehören die *neueren Untersuchungen über Axiome der Geometrie* dem *Typus A* an; es handelt sich hier um Untersuchungen ganz in Euklidischer Manier, die auch in der Darstellung dem vorhin geschilderten Aussehen sich wieder nähern.

Wir beenden damit diese kurze historische Übersicht; als ihr Ergebnis dürfen wir wohl die Erkenntnis mitnehmen, *daß in den Jahrhunderten mathematischer Geschichte unsere beiden hauptsächlichen Forschungsrichtungen gleichmäßig zur Geltung kom-*

die Schule keinen Einfluß mehr gewonnen, obgleich sie durchaus geeignet sind, die alten Vorurteile gegen die Differential- und Integralrechnung zu zerstören.

Aus der weiteren Entwicklung des 19. Jahrhunderts will ich nur ganz weniges hervorheben; zunächst nenne ich einige in der Richtung B liegende Fortschritte: Neuere Geometrie, mathematische Physik und Funktionentheorie komplexer Veränderlicher nach Cauchy und Riemann. Die Führer bei der Entstehung dieser 3 großen Gebiete waren zunächst die Franzosen. Es ist hier der Ort, auch über den Stil der mathematischen Darstellung ein Wort zu sagen. Bei Euklid finden Sie alles nach dem Schema „Voraussetzung, Behauptung, Beweis" gegliedert, dem sich ev. noch die „Determination" (Abgrenzung des Gebietes, innerhalb dessen die Betrachtungen gelten) anschließt; in weiten Kreisen können Sie die Meinung finden, daß die Mathematik sich immer in diesem Vierschritt bewegt. Aber gerade in der Periode, von der wir soeben reden, bildet sich besonders bei den Franzosen eine neue Kunstform der mathematischen Darstellung aus, die man als künstlerisch gegliederte Deduktion bezeichnen kann; Werke von Monge oder, um ein neueres Buch zu nennen, der Traité d'analyse von Picard

Das *19. Jahrhundert*, zu dem wir jetzt kommen, beginnt ganz wesentlich mit einer *festen Begründung der höheren Analysis durch Konvergenzkriterien*, um die man sich vorher noch nicht gekümmert hatte; im 18. Jahrhundert herrscht da noch der paradiesische Zustand, wo man gut und böse, konvergent und divergent nicht unterschied, und selbst in Eulers Introductio kommen konvergente und divergente Reihen friedlich nebeneinander vor. Nun geben aber bald am Anfang des neuen Jahrhunderts *Gauß und Abel* die ersten scharfen Konvergenzuntersuchungen, und *Cauchy* entwickelt in Vorlesungen und Büchern in den zwanziger Jahren die *erste exakte Begründung der Infinitesimalrechnung im modernen Sinne*. Er gibt nicht nur die *scharfe Definition des Differentialquotienten und Integrales als Grenzwert endlicher Quotienten bezw. Summen*, wie man dies vorher auch gelegentlich schon getan hatte, sondern baut auf ihr unter Hervorhebung des *Mittelwertsatzes* zum ersten Male ein *konsequentes Lehrgebäude der Infinitesimalrechnung* auf; wir werden später noch ausführlich darauf zurückkommen. — Diese Theorieen liegen wohl *im Sinne von A*, da sie das Gebiet systematisch logisch, isoliert von anderen durcharbeiten; sie haben indessen *auf*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a x^3 + \ldots,$$

und diese nannte er analytische Funktionen; soll heißen Funktionen, die in der Analysis vorkommen und mit denen man da wirklich etwas anfangen kann. Der Differentialquotient dieser $f(x)$ wird dann rein formal durch eine zweite Potenzreihe definiert, wie wir später genau sehen werden, und mit dem gegenseitigen Zusammenhang solcher Potenzreihen hat sich die Differential- und Integralrechnung zu beschäftigen. Durch diese Beschränkung auf formale Betrachtungen wurde für die damalige Zeit freilich eine Reihe von Schwierigkeiten beseitigt.

Man sieht, daß dieses Vorgehen von Euler und Lagrange wieder ganz der Richtung A angehört, indem es die anschauliche genetische Entwicklung durch einen streng in sich abgeschlossenen Gedankenkreis ersetzt. Diese beiden Werke haben nun auf den Schulunterricht den größten Einfluß gehabt, und wenn die Schule heute unendliche Reihen behandelt, oder durch Potenzentwicklung nach der sog. Methode der unbestimmten Koeffizienten Gleichungen löst, die Aufnahme der eigentlichen Differential- und Integralrechnung aber ablehnt, so steht sie noch ganz unter der Nachwirkung von Euler und Lagrange.

herrschende Forschungsrichtung B hier nicht mehr weiter helfen konnte, und Euler war es, der sie zuerst verließ: Er hatte wohl zwar noch keine eigentlichen inneren Bedenken gegen die Infinitesimalrechnung, aber sie macht doch seiner Meinung nach dem Anfänger zu viele Schwierigkeiten und Skrupel; aus diesem paedagogischen Grunde hält er es für ratsam, ihr in einem besonderen Lehrbuche, der Introductio in analysin infinitorum von 1748, diejenige Disziplin voranzustellen, die wir heute algebraische Analysis nennen; dahin verweist er insbesondere die Lehre von den unendlichen Reihen und sonstigen unendlichen Prozessen, die er dann hinterher beim Aufbau der Infinitesimalrechnung als Fundament benutzt.

Einen viel radikaleren Weg schlägt fast 50 Jahre später Lagrange in seiner „Théorie des fonctions analytiques" von 1797 ein; er kann seine Skrupel über die bisherige Begründung der Infinitesimalrechnung nur dadurch beseitigen, daß er diese als allgemeine Disziplin ganz verwirft, und sie lediglich als Inbegriff formaler Regeln über gewisse spezielle Funktionen bestehen läßt. Er betrachtet nämlich ausschließlich solche Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind:

<u>allgemeinsten Sinne, einschl. der Variationsrechnung,</u> sowie der <u>Ausbau der analytischen Geometrie und der analytischen Mechanik</u>. Ueberall haben wir hier ein erfreuliches Fortschreiten, genau wie in der Geographie nach der Entdeckung Amerikas die neuen Länder zuerst einmal nach allen Richtungen erforscht und durchquert wurden. Aber genau wie hier von genauen Vermessungen noch lange nicht die Rede war, wie man in der allerersten Zeit sogar über die allgemeine Lage des neuen Erdteils ganz falsche Vorstellungen hatte (glaubte doch Columbus zuerst, den Osten Asiens gefunden zu haben!), so war man auch in jenem der Mathematik im Erdteil der Infinitesimalkalküls neu eroberten Gebieten zunächst von einer zuverlässigen logischen Orientierung noch recht weit entfernt; ja sogar über ihre Beziehungen zu den alten wohlbekannten Disziplinen gab man sich mitunter Täuschungen hin, indem man die Infinitesimalrechnung für etwas <u>Mystisches</u> hielt, das gar keine genaue logische Analyse gestattete. Auf wie schwankendem Boden man hier stand, das ward erst recht deutlich, als man in Lehrbüchern die neuen Gebiete allgemeinverständlich darstellen wollte; da zeigte sich denn bald, daß die bisher allein

„fließen" sie gleichfalls ständig. Demgemäß heißt die Variable bei Newton geradezu *Fluens*, und was wir Differentialquotient nennen, bezeichnet er als *Fluxion $\dot{x}, \dot{y}$*. Wir sehen, wie hier *alles durchaus auf Anschauung begründet* ist.

Ähnliches gilt für die Darstellung von *Leibniz*, dessen *erste Publikation 1684* erschien. Er bezeichnet selbst geradezu als seine größte Entdeckung das *Prinzip der Stetigkeit in allen Naturgeschehen*, den Satz: „*Natura non facit saltum*"; auf diese Auffassung des Naturgeschehens stützt er seine mathematischen Entwicklungen, wiederum ein für das System B typischer Zug. Uebrigens spielt daneben bei Leibniz auch *sehr starke der Einfluß des Algorithmus (C)* hinein; von ihm rühren die algorithmisch so wertvollen Bezeichnungen dx und $\int f(x)\,dx$ her.

Im Ganzen aber ergibt sich als Resultat dieses Ueberblickes, *daß die großen Entdeckungen des 17. Jahrhunderts ganz der Entwickelungsreihe B angehören.*

Im *18. Jahrhundert* nimmt diese Entdeckungsperiode zunächst *in derselben Richtung* ihren Fortgang; als glänzendste Namen sind da *Euler* und *Lagrange* zu nennen. Es entwickeln sich so, um es nur ganz kurz zu nennen, die *Lehre von den Differentialgleichungen im* benutzte, sondern eine schwerfälligere Sprache redete. Dieses Prozesses bemächtigte sich bald von 1660 an *Newton*, der sich die *Reihe für das allgemeine Binom* gebildet hatte; gewiss verfuhr er dabei *nur nach Analogieschlüssen* aus den bekannten einfachsten Fällen, ohne einen strengen Beweis zu besitzen und ohne auch nur die Grenzen der Gültigkeit dieser Reihenentwicklung zu kennen – was wiederum ein Eingreifen des *algorithmischen Moments C* darstellt. Indem er diese Reihe auf $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ anwendet, erhält er nach dem Merkatorschen Verfahren die *Reihe für* $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$. Durch sehr geschickte *Umkehrung dieser Reihe* sowie der für $\log x$ findet er dann auch die *Reihen für $\sin x$ und e^x*. Als Abschluss dieser Kette von Entdeckungen ist endlich *Taylor* zu nennen, der 1714 sein *allgemeines Prinzip für die Potenzreihenentwicklung von Funktionen* findet.

Das *Entstehen der eigentlichen Infinitesimalrechnung am Ende des 17. Jahrhunderts*, auf das schon kurz hingewiesen wurde, ist bekanntlich *Leibniz und Newton* zu danken. Bei *Newton* ist die grundlegende Idee die *Vorstellung des Fließens*; beide Variable x, y werden als Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ der Zeit t aufgefasst, und während die Zeit dahinfließt, hinzu treten zugleich die 2 großen Probleme des 17.ten Jahrhunderts, das Tangentenproblem und das Quadraturproblem, das sind die Probleme des Differenzierens und Integrierens, auf. Zur Entwicklung der eigentlichen Differential- und Integralrechnung fehlt von hier nur noch die Erkenntnis, daß beide Probleme ganz nahe zusammenhängen, daß das eine die Umkehrung des andern ist; das scheint der Kern des großen Fortschrittes zu sein, der am Ende des Jahrhunderts gemacht wurde.

Vorher aber, im Laufe des Jahrhunderts, entsteht noch die Lehre von den unendlichen Reihen, insbesondere den Potenzreihen, und zwar nicht etwa als selbständige Disziplin im Sinne der algebraischen Analysis, sondern in engster Verbindung mit dem Quadraturproblem. Mercator (Latinisierung des deutschen Namens Krämer), der besonders durch die Mercatorprojektion bekannt ist, hat hier Bahn gebrochen; er hatte die kühne Idee, zur Reihenentwicklung von log $(1+x)$ den Bruch $\frac{1}{1+x}$ auszudividieren, und die entstehende Reihe gliedweise zu integrieren:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-+\dots)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

Das ist genau der Inhalt seiner Ueberlegung, wenn er auch natürlich nicht unsere einfachen Zeichen $\int$, dx etc.

gebra enthält; freilich ist das wohl nicht Cardanos eigenes Verdienst, denn er soll seine berühmte Formel ebenso wie anderes nicht selbst erfunden, sondern anderen Autoren entlehnt haben.

Von 1550 an steht dann das *trigonometrische Rechnen* im Vordergrund; getragen durch die Bedürfnisse der *Astronomie*, für die ich nur den Namen *Kopernikus* nennen will, erscheinen *die ersten großen trigonometrischen Tafelwerke*. *Von etwa 1600 an* schließt hieran unmittelbar die *Entwicklung der Logarithmen* an; die ersten Logarithmentafeln, die der Schotte *Napier* (oder *Neper*) aufstellte (1614), enthalten geradezu nur die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Wir sehen in diesen 100 Jahren also genau den Entwicklungsgang, wie er dem *Schema A* entspricht.

Wir kommen nun zu der *eigentlichen Neuzeit*, dem weiteren Verlaufe des *siebzehnten Jahrhunderts*. Hier tritt ganz die *Richtung B* in den Vordergrund. *1637* erscheint die *analytische Geometrie des Descartes*, die die für alles folgende grundlegende Verbindung zwischen Zahl und Raum schafft; dies Werk ist *im Neudruck*[1] bequem zugänglich. Im Anschluß-

1) R. Descartes, la géométrie. Nouv. éd. Paris 1886

ihrer Entdeckungen eine große Rolle gespielt haben, wenn ihnen auch für die endgültige Darstellung die Form A wieder unentbehrlich zu sein schien; das zeigt die kürzlich entdeckte *Schrift des Archimedes*,[1] in der dieser seine Körperberechnungen in durchaus modern anmutender Weise darlegt.

Neben den Griechen spielen im Altertum mathematisch besonders noch die *Inder als Schöpfer unseres modernen Ziffernsystems* und später die *Araber als seine Ueberlieferer* eine Rolle, auch die *ersten Anfänge des Buchstabenrechnens* finden sich bei ihnen. Diese Fortschritte gehören offenbar der *algorithmischen Entwicklungsreihe C* an.

Gehen wir nun bald zur *Neuzeit* über, so können wir zunächst *von etwa 1500 an die mathematische Renaissance* datieren, die eine *Reihe großer Entdeckungen* hervorgebracht hat. Ich nenne als Beispiel die *formale Auflösung der kubischen Gleichung* (Cardanische Formel), die in der *1545 in Nürnberg* erschienenen „*Ars magna*" des Cardano enthalten ist, einem höchst bedeutsamen Werke, das überhaupt wohl die Keime der modernen, über das *Schema der antiken Mathematik* hinausführenden Al-

[1] vgl. Heiberg und Zeuthen, eine neue Schrift des Archimedes. (Leipzig 1907).

Euklidische Aufbau der Geometrie, in der angewandten wird besonders das numerische Rechnen, die sog. Logistik ausgebildet (λόγος = allgemeine Zahl; vgl. S. 81). Dabei wurde diese recht gering angesehen – ein Vorurteil, das sich noch bis heute vielfach erhalten hat, allerdings meist nur bei Leuten, die selbst nicht numerisch rechnen können. Zu dieser geringeren Geltung der Logistik mag beigetragen haben, daß sie im Anschluß an die Trigonometrie und die Bedürfnisse des praktischen Vermessungswesens entwickelt wurde, das nun einmal von altersher dem Menschen nicht vornehm genug zu erscheinen pflegte. Freilich wurde sie wohl wiederum etwas rehabilitiert dadurch, daß eine andere Wissenschaft ohne sie nicht auskommen kann, die, wiewohl der Geodäsie verwandt, doch im Gegensatz zu ihr immer für eine der vornehmsten Disziplinen galt: die Astronomie. – Dieser griechische Wissenschaftsbetrieb mit seiner strengen Scheidung der einzelnen Gebiete, deren jedes dann in dem bekannten starren logischen Gefüge dargestellt wurde, gehört natürlich ganz der Entwicklungsreihe A an. Trotzdem waren den Griechen auch Betrachtungen im Sinne von B nicht fremd, und sie mögen bei ihnen zu heuristischen Zwecken und zur ersten Mitteilung lich schon werden, der Algorithmus häufig zu neuen Begriffen und Operationen gedrängt, noch ehe man sich über ihre Zulässigkeit Rechenschaft geben konnte. Selbst auf höheren Stufen der Entwicklung können diese algorithmischen Momente Nützliches leisten und haben es tatsächlich getan, so daß man sie geradezu als den *Untergrund der mathematischen Entwicklung* bezeichnen kann; es heißt also unhistorisch denken, wenn man, wie es heute manchmal Mode ist, diese Momente als bloß formale Entwicklungen geringschätzig bei Seite schiebt.

Ich möchte nunmehr den Gegensatz dieser verschiedenen mathematischen Arbeitsrichtungen durch die Geschichte der Mathematik wirklich genauer verfolgen, wobei ich mich natürlich auf die Erwähnung nur der allerwichtigsten Züge der Entwicklung beschränken muß. Hierbei wird der *durchgreifende Unterschied zwischen A und B innerhalb des ganzen Gebietes der Mathematik* noch klarer werden als in der obigen auf die Analysis beschränkten Zusammenstellung.

Beginnen wir mit den *alten Griechen*, so finden wir eine *scharfe Trennung der reinen und angewandten Mathematik*, die auf Plato und Aristoteles zurückgeht. Zur reinen Mathematik gehört vor allem der bekannte gehobenen Bedeutung der Funktionen zum angemessen: Hier entstehen ja e^x und $\sin x$ aus derselben Quelle, der Quadratur einfacher Kurven, und man wird von da aus bald – wir werden das später noch sehen – auf die Differentialgleichungen einfachsten Typus $\left(\frac{de^x}{dx} = e^x \text{ bzw. } \frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x\right)$ geführt, die allen jenen Anwendungen naturgemäß zu Grunde liegen.

Zum vollen Verständnis der Entwicklung der Mathematik müssen wir aber noch eines dritten Momentes C gedenken, das neben und innerhalb der Entwicklungsreihen A und B sehr häufig eine große Rolle spielt. Es handelt sich da um das, was man mit einem durch Entstellung des Namens eines arabischen Mathematikers entstandenen Worte als Algorithmus bezeichnet; das ist im Grunde schließlich jedes geordnete formale Rechnen, insbesondere Buchstabenrechnen. Welch einen großen Anteil an der Entwicklung der Wissenschaft das algorithmische Verfahren gewissermaßen als eine selbständig vorwärtstreibende den Formeln innewohnende Kraft, unabhängig von der Absicht und Einsicht der jeweiligen Mathematiker und oft sogar ihr entgegen gehabt hat, das haben wir schon wiederholt betont; auch in den Anfängen der Infinitesimalrechnung hat, wie wir noch gelegentwelche den Schüler – soweit er nicht spezifisch abstrakt mathematisch veranlagt ist – mehr packen kann. Betrachten Sie, um sich das recht zu vergegenwärtigen, nur das *Beispiel der Funktionen e^x und $\sin x$*, über die wir gerade in dieser Richtung später noch viel zu reden haben werden! Im System A – und leider schließt man sich dem gerade hierin auf der Schule fast ausschließlich an – treten beide ganz heterogen auf, e^x bzw. der *Logarithmus* erscheint als *bequemes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen*, *$\sin x$* aber entsteht in der *Dreiecksgeometrie*. Wie soll man da verstehen, daß beide in so einfacher Weise zusammenhängen, und noch mehr, daß sie sich in den verschiedensten Gebieten, die weder mit der Technik des numerischen Rechnens, noch mit der Geometrie das mindeste zu tun haben, immer wieder ganz von selbst als naturgemäßer Ausdruck der dort obwaltenden Gesetze darbieten? Wie weit diese Anwendungsmöglichkeiten gehen, zeigen die Namen „*Zinseszinsfunktion*" oder „*Gesetz des organischen Wachstums*", die man e^x wohl beigelegt hat, zeigt andererseits die Tatsache, daß $\sin x$ überall da, wo von *Schwingungen* die Rede ist, eine zentrale Rolle spielt. *Im Systeme B aber erscheint dies alles ganz verständlich und der von Anfang an hervor-*

Funktionen, die auf den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen oder dem Cauchyschen Integralsatze basiert ist.

Versuchen wir nun, das Resultat dieses Überblickes in bestimmte Worte zu fassen, so können wir vielleicht sagen, daß bei A eine partikularistische Auffassung der Wissenschaft zu Grunde liegt, die das Gesamtgebiet in eine Reihe von einander wohl abgegrenzter Teile zerlegt und in einem jeden für sich mit einem Minimum von Hilfsmitteln unter möglichster Vermeidung von Anleihen in den Nachbargebieten auszukommen sucht; das Ideal ist ein schön auskrystallisierter logisch in sich geschlossener Aufbau jeder der einzelnen Gebiete. Demgegenüber legt der Anhänger von B. gerade auf eine organische Verknüpfung der Einzelgebiete und auf die zahlreichen Anregungen, die sie sich gegenseitig gewähren, das Hauptgewicht, und er bevorzugt demgemäß die Methoden, die ihm das gleichzeitige Verständnis mehrerer Gebiete unter einheitlichem Gesichtspunkte erschließen; sein Ideal ist die Erfassung aller mathematischen Wissenschaften als eines Ganzen.

Man kann wohl nicht im Zweifel sein, welche der beiden Richtungen mehr Leben in sich hat, gemäße anschauliche Quelle für die Idee des Differentialquotienten sowohl wie des Integrales; zu ersterer führt die Steigung der Kurve, zu letzterer der Flächeninhalt, den die Kurve mit der Abscissenachse begrenzt.

3) In allen Fällen, in denen der Integrationsprozeß (oder Quadraturprozeß im eigentlichen Sinne des Wortes) mit den rationalen Funktionen nicht explizit durchführbar ist, gibt er aus sich heraus zur Entstehung neuer Funktionen Anlaß, die so auf eine durchaus natürliche und einheitliche Art eingeführt werden. So definiert die Quadratur der Hyperbel den Logarithmus:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

während die Quadratur des Kreises sich leicht auf

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

also auf die Inversen der trigonometrischen Funktionen zurückführen läßt. Sie wissen, daß derselbe Gedankengang weiterhin zu neuen höheren Funktionsklassen, insbesondere den elliptischen Funktionen führt.

4.) Die Entwicklung aller so gewonnenen Funktionen in unendliche Potenzreihen geschieht wiederum nach einem einheitlichen Prinzip, dem Taylorschen Lehrsatze.

5.) Als höhere Fortführung dieser Ansätze erscheint dann die Cauchy-Riemannsche Theorie der komplexen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \;.$$

Sie erscheinen um so wunderbarer, als die durch sie in Beziehung gesetzten Funktionen vorher von ganz verschiedenen Gebieten aus definiert worden sind.

5.) Über die Schulmathematik hinaus schließt sich an diesen Aufbau als konsequente Fortsetzung an die Weierstraßsche Theorie der Funktionen komplexen Argumentes, die von den Potenzreihen ausgeht.

Stellen wir diesem nun ebenso in kurzer Zusammenfassung das Schema der zweiten Entwicklungsreihe B entgegen; hier herrscht allgemein der Gedanke der analytischen Geometrie, der eine Fusion der Zahl- und Raumanschauung will. Demgemäß beginnt man

1.) mit der graphischen Darstellung der einfachsten Funktionen, der Polynome und rationalen Funktionen einer Variablen. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Kurven mit der Abscissenachse setzen die Nullstellen der Polynome in Evidenz, und hieran schließt sich naturgemäß die Lehre von der numerischen Auflösung der Gleichungen durch Näherung an.

2.) Das geometrische Kurvenbild gibt die natur-das herrschende ist:

1.) An der Spitze steht die formale Lehre von den Gleichungen, also das Operieren mit ganzen rationalen Funktionen und die Behandlung der Fälle, in denen algebraische Gleichungen durch Wurzelzeichen lösbar sind.

2.) Aus der systematischen Verfolgung des Potenzbegriffes und seiner Umkehrungen entstehen die Logarithmen, die sich beim numerischen Rechnen als sehr fruchtbringend erweisen.

3.) Während die Geometrie bisher ganz getrennt von Arithmetik und Analysis gehalten wurde, macht man nun eine Anleihe bei ihr, die die ersten Definitionen einer zweiten Art transzendenter Funktionen, der trigonometrischen, liefert; die weitere Theorie dieser wird als neue gesonderte Disziplin ausgebaut.

4.) Es folgt nun die algebraische Analysis, die die Entwicklungen der einfachsten Funktionen in unendliche Reihen lehrt; es kommen in Betracht das allgemeine Binom, der Logarithmus und seine Inverse, die Exponentialfunktion, sowie die trigonometrischen Funktionen; auch die allgemeine Lehre von den unendlichen Reihen und dem Operieren mit ihnen gehört hierhin. Hierbei entstehen dann die überraschenden Zusammenhänge zwischen den genannten elementaren Transzendenten, insbeeinfügen, der auch auf den allgemeinen gegenwärtigen Betrieb des Schulunterrichts sowie auf das, was wir daran bessern wollen, neues Licht fallen lassen wird. Lassen Sie mich von der Bemerkung ausgehen, daß wir *in der Entwicklungsgeschichte* der Mathematik bis in die Gegenwart sehr deutlich *zwei verschiedene Entwicklungsreihen* unterscheiden können, die sich bald gegenseitig ablösen, bald gleichzeitig selbständig nebeneinander herlaufen, bald endlich auch sich wechselseitig durchdringen. Es ist schwer, den Unterschied, den ich hier im Sinne habe in prägnante Worte zu fassen, da keine der geläufigen Einteilungen recht paßt; Sie werden ihn jedenfalls am besten an einem konkreten Beispiele verstehen, wenn ich Ihnen nämlich darlege, wie man im Sinne jeder der beiden Entwicklungsreihen die *elementareren Kapitel des Systems der Analysis* wirklich aufzubauen hätte.

Folgen wir der einen Entwicklungsreihe, die wir kurzweg als *Entwicklungsreihe A* bezeichnen mögen, so kommt folgendes System heraus, das heute an den Schulen sowie in den elementaren Lehrbüchern meist nen behandelt und auf einen Nenner bringt etc.; ursprünglich soll sich das auch auf die Tätigkeit eines Wundarztes bezogen haben, der gebrochene Knochen heilt. Kästner führt dafür den Donquichotte an, der zu einem Algebristen geht, um sich seine Rippenbrüche wieder einrenken zu lassen; ob sich Cervantes freilich damit wirklich dem Sprachgebrauch anschließt, und ob nicht etwa nur eine Satire in der Stelle liegt, mag unentschieden bleiben.

Ein zweites Buch hier ist eine ganze Reihe von Jahren jünger und stammt von dem Berliner Professor <u>M. Ohm: Versuch eines vollständig konsequenten Systemes der Mathematik</u>.[1]; es ist ein Buch ähnlicher Tendenz, wie das Kästnersche und war einstmals sehr verbreitet. Ohm steht aber dem modernen Standpunkte schon viel näher, indem er das <u>Prinzip der Erweiterung des Zahlbereiches</u> deutlich ausspricht; gerade wie die negativen Zahlen, so sagt er etwa, muß das Symbol $\sqrt{-1}$ als <u>neues Ding</u> den reellen Zahlen hinzugefügt werden. Die geometrische Deutung freilich hat er auch noch nicht, wie wir denn auch in der Tat vor der entscheidenden Publikation von Gauß (1831) stehen.

Endlich lege ich Ihnen noch eines der vielen mo-

---

1) 9 Bände. Berlin 1828. Bd. I (Arithm. u. Algebra) pg. 276

imaginären Größen etwa mit diesen Worten: „Wer eine Wurzel geraden Exponenten aus einer „verneinten“ Größe [so sagte man damals statt negativ] zu ziehen fordert, der fordert etwas Unmögliches, denn es gibt keine verneinte Größe, die eine solche Potenz wäre.“ Das ist in der Tat ganz korrekt, aber nun geht es auf S. 34 weiter: „Solche Wurzeln *heißen* unmöglich oder imaginär“ und ohne daß die Berechtigung der Sache viel untersucht wird, wird ganz ruhig wie mit gewöhnlichen Zahlen mit ihnen operiert, obwohl doch ihre Existenz noch eben bestritten wurde – gleichsam als ob durch die Benennung das Unvernünftige plötzlich brauchbar würde. Sie erkennen hier noch einen Reflex des Leibnizschen Standpunktes, daß die imaginären Zahlen eigentlich etwas ganz Törichtes sind, aber doch unbegreiflicher Weise zu brauchbaren Resultaten führen.

Kästner hat übrigens sehr amüsant geschrieben, wie er ja auch als Epigrammatist bekanntlich in der Literatur einen Namen hat. So verbreitet er sich, um ein Beispiel für viele anzuführen, in der Einleitung dieses Bandes über den *Ursprung des Wortes Algebra*, das ja, wie der Artikel „Al“ anzeigt, aus dem Arabischen kommt. Ein Algebrist soll nach Kästner ein Mann sein, der Brüche „ganz macht“, also etwa rationale Funktioüber die Rolle, die diese Begriffe im *Schulunterricht* spielen. Quaternionen auf der Schule vorzubringen, fällt wohl keinem Menschen ein, wohl aber *wird auf die gemeinen komplexen Zahlen $x+iy$ immer die Rede kommen.* Es ist vielleicht nicht uninteressant, wenn ich Ihnen statt langer Erörterungen, wie man es macht, und wie man es machen sollte, an der Hand von drei Büchern aus verschiedenen Zeitepochen einmal darlege, wie sich der *Unterricht historisch entwickelt* hat.

Ich lege Ihnen zunächst ein Buch von *Kästner* vor, der in der *zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts* in *Göttingen* die maßgebende Stelle einnahm. Damals trieb man auf der Universität noch diejenigen elementarmathematischen Dinge, die dann später, in den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts etwa, auf die Schule übergingen, und so hielt auch Kästner damals populärmathematische Vorlesungen, an denen auch Nichtmathematiker in großer Zahl teilnahmen. Sein Lehrbuch, das diesen Vorlesungen zu Grunde lag, heißt *mathematische Anfangsgründe*, und es kommt für uns hier die 2. Abteil. des 3. Teiles: „*Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*"[1] in Betracht. Da beginnt auf S. 20 die Behandlung der

1.) 3. Aufl. Göttingen 1794.

muß da wohl die eigentliche *Quaternionenmultiplikation* von dem *allgemeinen Quaternionenkalkül* unterscheiden. *Die erstere ist jedenfalls etwas äußerst Nützliches*, wie aus den vorangehenden Erörterungen zur Genüge hervorgeht. Der allgemeine Kalkül hingegen, wie ihn Hamilton in Aussicht nahm, betrachtet Additionen, Multiplikationen, Divisionen von Quaternionen in beliebiger Folge, d. h. er studiert die *Algebra der Quaternionen*, und indem man unendliche Prozesse hinzunimmt, kann man geradezu auch zu einer *Funktionentheorie der Quaternionen* aufsteigen; natürlich wird hier wegen des Fehlens des kommutativen Gesetzes alles ganz anders, als in der Theorie der gewöhnlichen komplexen Variablen. Man darf aber wohl behaupten, *daß diese allgemeinen weitgehenden Ideen Hamiltons sich nicht bewährt haben*, d. h. daß sie mit anderen Disziplinen der Mathematik und der Anwendungen nicht in Berührung und lebendigen Ideenaustausch getreten sind und daher auch weniger allgemeines Interesse gefunden haben.

Aber in der Mathematik ist es wie sonst im menschlichen Leben: neben der ruhigen, objektiven Ansicht der Majorität treten leidenschaftliche individusionalen Raum zurückkehren, die Formel (2) so modifizieren, daß sie eine <u>reine Drehung ohne Streckung</u> darstellt; dazu müssen wir x', y', z' durch $x' \cdot T^2, y' \cdot T^2, z' \cdot T^2$, also q' durch $q' \cdot T^2$ ersetzen, und wenn wir bedenken, daß $\mu^{-1} = \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{T^2}$ ist, so erhalten wir als Formel der reinen Drehung

$$(6) \quad \underline{ix' + jy' + kz' = \mu(ix + jy + kz) \cdot \mu^{-1}}.$$

Es ist keine Spezialisation, wenn man hierin μ als Quaternion vom Tensor 1 annimmt:

$$\underline{\mu = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta), \text{ wo } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,}$$

und daher entsteht die Formel (6) auch aus (5), indem man T gleich 1 setzt. In dieser Gestalt erscheint die Formel <u>1845</u> zuerst bei <u>Cayley</u>.[1] – Genau wie früher für den vierdimensionalen Raum gestaltet sich auch hier die <u>Zusammensetzung zweier Drehungen</u> äußerst einfach. Haben wir eine zweite Drehung

$$ix'' + jy'' + kz'' = \mu'(ix' + jy' + kz')\mu'^{-1}, \text{ wo}$$

$$\mu' = \cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega'}{2}(i\xi' + j\eta' + k\zeta')$$

(Achse ξ', η', ζ' und Amplitude ω'), so folgt wiederum

$$ix'' + jy'' + kz'' = \mu' \cdot \mu \cdot (ix + jy + kz) \cdot \bar{\mu} \cdot \mu'^{-1}$$

als Darstellung der resultierenden Drehung, so daß sich deren Achse und Drehwinkel ξ'', η'', ζ'' bzw. ω'' aus

$$\underline{\mu'' = \cos\frac{\omega''}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}(i\xi'' + j\eta'' + k\zeta'') = \mu' \cdot \mu}$$

1) On certain results relating to quaternions (Coll. pap. I (1889) pag. 123).

Transformationsformeln (2) für $T = 1$ vermöge (4) gerade in die Formeln übergehen, die Euler für die Drehung eines Koordinatensystems um eine Achse $\xi | \eta | \zeta$ durch den Winkel ω aufgestellt hat. Sie finden das näher ausgeführt beispielsweise in Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 1[1] (§ 7, pag. 55 ff.), wo explizite auf die Quaternionentheorie Bezug genommen wird, oder in Baltzers Theorie und Anwendung der Determinanten[2] (§ 14, pag. 187.)

Wir wollen hier nun noch den kurzen bequemen Ausdruck explizit hinschreiben, den die Quaternionenrechnung für die Drehung um die Achse ξ, η, ζ durch den Winkel ω, verbunden mit einer Streckung um T^2 ergibt, und den wir durch Eintragen der Formeln (4) in (1) erhalten:

$$(5)\quad ix' + jy' + kz' = T^2 \left\{\cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\} \cdot \left\{ix + jy + kz\right\}\left\{\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\}$$

Damit sind die ganzen Eulerschen Drehungsformeln in einer Gestalt kondensiert, die sich dem Gedächtnis leicht einprägt: Es ist der Vector $ix + jy + kz$ vorn und hinten mit konjugierten Quaternionen vom Tensor 1, sog. Versoren (= Dreher im Gegensatz zu Tensor = Strecker) zu multiplizieren, wozu noch als skalarer Faktor der Betrag

1) Leipzig 1897.
2) Leipzig 1881.

genügt es, ein Beispiel vorzunehmen, denn da T immer positiv ist und nie Null wird, kann bei Veränderung der Werte a, b, c, d die Determinante als stetige Funktion nie in den Wert $-T^6$ übergehen, wenn sie einmal den Wert $+T^6$ hat, und nur diese beiden Werte kommen, wie oben bemerkt, in Betracht. Setzen wir nun z. B. $a=b=c=0$, so wird die Determinante der Substitution (2) $\begin{vmatrix} d^2, 0, 0 \\ 0, d^2, 0 \\ 0, 0, d^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6$; wir haben also immer positives Zeichen, und daher ist unsere durch (1) dargestellte Transformation in der Tat stets eine eigentliche Drehung und Streckung. Eine Drehstreckung verbunden mit Spiegelung ist hinterher ebenso einfach darzustellen, indem man nur $\bar{q}' = p \cdot q \cdot \bar{p}$ schreibt; denn das ist genau die Zusammensetzung der vorigen Transformation mit der Spiegelung $x' = -x, y' = -y, z' = -z$.

Wir werden nun aber noch wissen wollen, wie die Drehachse der in (2) enthaltenen Drehung liegt, und was ihr Drehwinkel ist. Die Richtungscosinus der Drehungsachse seien ξ, η, ζ, für die bekanntlich

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

gilt, der Drehwinkel (Amplitude der Drehung) sei ω. Dann gelten folgende Relationen:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} d = T \cos \frac{\omega}{2} \\ a = T \cdot \xi \cdot \sin \frac{\omega}{2}, \; b = T \cdot \eta \sin \frac{\omega}{2}, \; c = T \cdot \zeta \cdot \sin \frac{\omega}{2}, \end{array} \right.$$

Um das nachzuweisen, müssen wir vor allem einsehen, daß der skalare Teil des rechten Produktes verschwindet, also q' in der Tat ein Vector wird. Dazu multiplizieren wir zunächst $p \cdot q$ nach den Quaternionenregeln aus, und finden:

$$q' = \{-ax - by - cz + i(dx + bz - cy) + j(dy + cx - az) + k(dz + ay - bx)\} \cdot \{d - ia - jb - kc\};$$

nach abermaliger Quaternionenmultiplikation ergibt sich in der Tat für den skalaren Teil von q' der Wert 0, während seine drei Vectorkomponenten die Ausdrücke erhalten:

$$(2)\quad \begin{cases} x' = (d^2+a^2-b^2-c^2)\,x + 2(ab-cd)\,y + 2(ac+bd)\,z \\ y' = 2(ab+cd)\,x + (d^2+b^2-c^2-a^2)\,y + 2(bc-ad)\,z \\ z' = 2(ac-bd)\,x + 2(bc+ad)\,y + (d^2+c^2-a^2-b^2)\,z. \end{cases}$$

Nun bleibt zu zeigen, daß diese Formeln in der Tat eine Drehstreckung darstellen. Das ergibt sich sofort, wenn wir zu (1) die nach früherem (S. 160) zugehörige Tensorengleichung bilden:

$$x'^2+y'^2+z'^2 = (d^2+a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(d^2+a^2+b^2+c^2), \text{ oder}$$

$$\underline{x'^2+y'^2+z'^2 = T^4 \cdot (x^2+y^2+z^2)},$$

wo T den Tensor von p bedeutet. Wir bemerken ferner sogleich noch, daß unsere Formel in der Tat die 4 willkürlichen Parameter enthält, die nach der obigen Abzählung zu der allgemeinen Drehstreckung gehören. Um nun noch

Bedingungen dar, und alle ihr genügenden linearen Substitutionen enthalten noch $9 - 5 = 4$ willkürliche Parameter (vgl. die analoge Ueberlegung S. 162). Hat eine dieser Substitutionen positive Determinante, so stellt sie, wie schon erwähnt, eine Drehung des Raumes um den Anfangspunkt verbunden mit einer Streckung im Verhältnis $1 : M$ dar; ist aber die Determinante negativ, so entspricht die Substitution einer solchen Drehstreckung, zusammengesetzt noch mit einer Spiegelung des Raumes, wie sie durch $x' = x,\ y' = y,\ z' = -z$ gegeben wird. Übrigens kann man zeigen, daß die Determinante nur die beiden Werte $\pm M^3$ annehmen kann.

Um diese Verhältnisse nun durch Quaternionen darzustellen, reduzieren wir natürlich zunächst die Unbestimmten q, q' auf ihren vectoriellen Bestandteil:

$$q' = ix' + jy' + kz' \quad , \quad q = ix + jy + kz,$$

das sind die Vectoren vom Anfangspunkt nach dem Punkt vor, bezw. nach der Transformation. Dann ist die Behauptung, daß die allgemeine Drehstreckung des dreidimensionalen Raumes entsteht, wenn wir in der früheren Formel p und π konjugiert nehmen, also setzen:

$$q' = p \cdot q \cdot \bar{p}, \quad \text{oder ausgeschrieben:}$$

$$(1) \left\{ ix' + jy' + kz' = (d + ia + jb + kc)(ix + jy + kz)(d - ia - jb - kc). \right.$$

wir dann durch einfache Spezialisation Formeln für die gleichen dreidimensionalen Operationen erhalten, und in dieser gerade beruht die große Bedeutung der Quaternionenmultiplikation für die gewöhnliche Physik und Mechanik; ich sage ausdrücklich der gewöhnlichen, um einer Weiterentwicklung dieser Disziplinen, nach der auch die vorigen Deutungen direkt anwendbar werden, nicht vorzugreifen. Und diese ist vielleicht näher, als Sie denken mögen; neuere Untersuchungen der Elektronentheorie, wie sie in dem sog. Prinzip der Relativität zum Ausdruck kommen, sind eigentlich nichts, als konsequente Benutzung der Drehstreckungen eines vierdimensionalen Raumes, und sie werden auch neuerdings von Prof. Minkowski geradezu in diesem Sinne dargestellt.

Aber bleiben wir nun bei 3 Dimensionen. Da wird eine Drehstreckung einen Punkt x, y, z so in x', y', z' transformieren, daß

$$x'^2+y'^2+z'^2 = M^2(x^2+y^2+z^2)$$

wird, wobei M die lineare Streckung einer jeden Länge bedeutet. Da die allgemeine lineare Transformation der x, y, z in die x', y', z' $3 \cdot 3 = 9$ Koeffizienten enthält, und die linke Seite nach Einführung dieser Ausdrücke in eine quadratische Form von x, y, z mit $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Termen übergeht, nämlich eine zweite Drehstreckung durch die Gleichung

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = \mu' . q' . \pi'$$

dargestellt, wo μ', π' bestimmte gegebene Quaternionen sind, so erhalten wir, indem wir hier den obigen Wert von q' eintragen:

$$q'' = \mu' . (\mu . q . \pi) . \pi' ;$$

nach dem associativen Gesetze der Multiplikation wird das:

$$q'' = (\mu' . \mu .) q . \ (\pi . \pi') = \kappa . q . \varrho , \text{ wo}$$
$$\kappa = \mu' . \mu \quad , \quad \varrho = \pi . \pi'$$

bestimmte neue Quaternionen sind. Wir haben so wieder den Ausdruck der Drehstreckung, die q in q'' überführt, genau in der alten Form, und zwar <u>entstehen vorderer und hinterer Multiplikator von q durch Quaternionenmultiplikation aus den beiden vorderen bezw. hinteren Multiplikatoren in den Darstellungen der zusammensetzenden Drehstreckungen</u>, wobei die Reihenfolge wesentlich ist.

Sie werden nun vielleicht, meine Herren, mit dieser vierdimensionalen Deutung unzufrieden sein und etwas handgreiflicheres, in die gewöhnliche <u>dreidimensionale</u> Raumanschauung passendes verlangen. Nun gut, aus den bisher angegebenen Formeln wollen würdige, durch Quaternionenmultiplikation die allgemeinste Drehstreckung herausbring... lich $\pi = \delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$ eine konstante Quatern... man genau wie vorhin, daß auch $q' = q \cdot \pi$ (... der früheren Formel nur durch Vertauschung ... folge unterscheidet) eine Drehstreckung des R_4, daher ist auch die Zusammensetzung beider

$$q' = p \cdot q \cdot \pi = (d + ia + jb + kc) \cdot q \cdot (\delta + i\alpha + j\beta + k ...$$

eine solche. Diese Transformation enthält nun ge... kürliche Parameter, da sie ungeändert bleibt, w... a, b, c, d mit derselben reellen Zahl multip... gleichzeitig $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch sie dividiert; es ... also plausibel, daß sie die allgemeine Dreh... des vierdimensionalen Raumes darstellt, un... schöne Satz ist tatsächlich von Cayley bewiesen ... will das freilich hier nur historisch berichten, ... nicht zu sehr ins Detail dieser Deutung zu ... Die Formel findet sich in Cayleys Arbeit „On ... graphic transformation of a surface of the secon... into itself“ 1) von 1854 sowie in einigen ander... Abhandlungen. 2)

Diese Cayleysche Formel hat nun auch ... Vorzug, daß sie die Zusammensetzung zweier D...

---

1) abgedruckt in Cayley, Collected mathematical papers, Vol. II (1889) pag. 133.

2) vgl. z. B. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches (pag. 214)

vierdimensionalen billig: Wir werden sagen, daß unsere lineare Transformation in genau denselben Sinne eine Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes bei festem Anfangspunkt darstellt. Wir können nun aber leicht sehen, daß hier nicht die allgemeinste mögliche Drehstreckung vorliegt. Denn unsere Transformation enthält nur 4 willkürliche Parameter a, b, c, d während wir sogleich zeigen wollen, daß die allgemeinste Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes R_4 deren 7 enthält. Damit nämlich die allgemeine lineare Transformation eine Drehstreckung wird, muß die Identität bestehen:

$$x'^2+y'^2+z'^2+w'^2 = T^2\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right);$$

wir erhalten daraus durch Koeffizientenvergleichung 10 Bedingungen, da die linke Seite nach Ersetzung der $x' \dots w'$ durch ihre Ausdrücke in den $x \dots w$ in eine quadratische Form von 4 Variablen übergeht und daher $\frac{4\cdot 5}{2} = 10$ Terme enthält. Da aber T noch willkürlich ist, sind das nur $10 - 1 = 9$ Bedingungen für die 16 Koeffizienten der linearen Transformation, so daß in der Tat noch $16 - 9 = 7$ Parameter willkürlich bleiben.

Man kann nun aber, und das ist das mer-

Transformation der Punkte $x|y|z|w$ des vierdimensionalen Raumes in die $x'|y'|z'|w'$ dar, indem sie jedem vierdimensionalen Vector einen andern zuordnet; die expliciten Gleichungen der Transformation ergeben sich durch Vergleichung der Koeffizienten aus der Produktdarstellung von S. 150. Aus der soeben abgeleiteten Tensorengleichung sehen wir aber, daß dabei der Abstand $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$ eines jeden Punktes vom Nullpunkt mit ein und demselben konstanten Faktor $T = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ multipliziert wird, und ferner sahen wir oben (S. 152), daß die Determinante der linearen Transformation sicher positiv ist. Es ist nun aus der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes bekannt, daß eine lineare Transformation der x, y, z, die die Eigenschaft hat, $x^2+y^2+z^2$ genau in sich selbst zu transformieren, (d.h. die „orthogonal" ist), und die obendrein noch eine positive Determinante besitzt, daß diese eine Drehung des Raumes um den Koordinatenanfang darstellt, und daß man jede Drehung so erhält. Führt aber die lineare Transformation $x^2+y^2+z^2$ nur bis auf einen Faktor T^2 in sich über, und ist die Determinante wiederum positiv, so wird eine Drehung in Verbindung mit einer Streckung des ganzen Raumes auf das T-fache bei festem Koordinatenanfang, also eine sog. Drehstreckung dargestellt. Was

p. M. Also ist insbesondere

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=p\,\bar p\,(w^2+x^2+y^2+z^2)$$

und da $p\cdot\bar p$ das Quadrat des Tensors von p ist:

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=(d^2+a^2+b^2+c^2)(w^2+x^2+y^2+z^2)$$

d. h. der Tensor eines Quaternionenproduktes ist gleich dem Produkt der Tensoren der Faktoren. Natürlich kann man diese Formel auch durch direkte Rechnung erhalten, wenn man die Ausdrücke für w', x', y', z' direkt der Multiplikationsformel von S. 150 entnimmt.

Nunmehr wollen wir die Quaternion q als die Strecke vom Nullpunkte eines vierdimensionalen Raumes zum Punkte $x\ y\ z\ w$ desselben deuten – ganz analog zu der Deutung der Vektors im dreidimensionalen Raume. Man hat es wohl heute nicht mehr nötig, sich zu entschuldigen, wenn man den vierdimensionalen Raum benutzt, wie man das zur Zeit, als ich studierte, stets tun mußte; Sie wissen alle, daß irgend eine metaphysische Meinung nicht dahinter steckt, sondern der mehrdimensionale Raum einfach ein unserer tatsächlichen Raumvorstellung analoges, bequemes Mittel mathematischer Ausdrucksweise ist. Halten wir nun den Faktor p, d. h. die Größen d, a, b, c fest, so stellt die Quaternionengleichung $q'=p\cdot q$ eine gewisse lineare a, b, c, x, y, z das entgegengesetzte Vorzeichen in der S. 150 gegebenen Darstellung des Produkts lare Teil ungeändert und nur die nicht unter Faktoren von i, j, k wechseln das Zeichen; vert wir aber gleichzeitig noch die Reihenfolge der so wechseln auch die unterstrichenen Faktore chen, und demnach ergibt $\bar{q} \cdot \bar{p}$ gerade den gierten Wert $\bar{q}'$ zu $q' = p \cdot q$:

<u>Ist $q' = p \cdot q$, so ist $\bar{q}' = \bar{q} \cdot \bar{p}$.</u>

Multiplizieren wir diese beiden Quaternionen gen miteinander, so ergibt sich:

$$q' \cdot \bar{q}' = p \cdot q \cdot \bar{q} \cdot \bar{p}.$$

Dabei ist die Reihenfolge der Faktoren wesen aber können wir das Associativgesetz anwen schreiben:

$$q' \cdot \bar{q}' = p \cdot (q \cdot \bar{q}) \bar{p}.$$

Da nun, wie wir oben sahen,

$$q \cdot \bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

ist, ergibt sich:

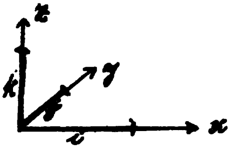
$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)\, \bar{p}.$$

Hier ist nun der mittlere Faktor der rechten Sei Skalar, und für die Multiplikation eines jede lars M mit einer Quaternion gilt das kommu Gesetz, da $M \cdot p = Md + i\,(Ma) + j\,(Mb) + k$

Sprech- und Schreibweise scheint mir nach diesen und ähnlichen Erfahrungen überhaupt nur möglich zu sein, wenn äußerst gewichtige materielle Interessen dahinter stehen. Nur unter einem solchen Drucke konnte 1881 in der Elektrotechnik das einheitliche Maßsystem nach Volt, Ampère, Ohm allgemeine Annahme finden, und dann in der Folge durch die staatliche Gesetzgebung festgelegt werden, da die Industrie als Grundlage aller ihrer Bezeichnungen eine derartige Einheit der Bezeichnung dringend brauchte. Hinter der Vectorrechnung stehen so starke materielle Interessen noch nicht, und daher wird man sich vorläufig wohl oder übel damit abfinden müssen, daß jeder einzelne Mathematiker bei der ihm gewohnten Bezeichnung bleibt, die er als bequemste oder gar – wenn er etwas dogmatisch veranlagt ist – als die allein richtige empfindet.

3. Quaternionenmultiplikation und Drehstreckungen des Raumes.

Gehen wir nun nach diesem Exkurs zur geometrischen Deutung der Multiplikation allgemeiner Quaternionen über, und schicken noch folgende Untersuchung voran: Ersetzen wir in dem Produkt $q' = p \cdot q$ p und q durch ihre konjugierten Werte $\bar{p}, \bar{q}$, d. h. geben wir

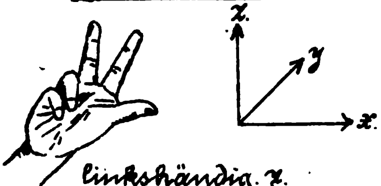


nen Einheitsstrecke. Man ka
weiter i, j in beliebige Vectoren
stetig überführen, daß k in den V
teil von p. q stetig übergeht, ohne dazwischen zu ver
und daher müssen auch stets der erste Faktor,
und das Vectorprodukt aneinander liegen wie
und z - Achse des Koordinatensystems, also re
dig oder linkshändig, je nachdem man das K
tensystem einmal gewählt hat.

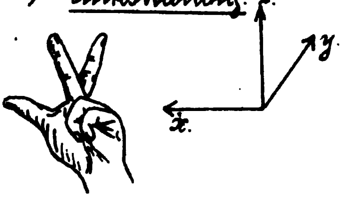
Ich will hier doch noch einige Worte über d
ge Frage der Bezeichnungsweise in der Vectorana
anfügen. Es werden nämlich nebeneinander
Menge verschiedener Zeichen für jede der Vectorope
gebraucht und leider ist es bisher nicht gelunge
einzige allgemein verbindliche Bezeichnungs
schaffen. Wir haben vor 4 Jahren auf der Na
versammlung zu Kassel eine Kommission zu d
Zwecke eingesetzt; ihre Mitglieder konnten sich
nicht völlig einigen und, da jeder doch den ge
len hatte, von seinem ursprünglichen Standpunk
andern einen Schritt entgegenzukommen, war der
Erfolg der, daß ungefähr 3 neue Bezeichnungen
den! Eine wirkliche Einigung aller bei solchen
in Betracht kommenden Kreise auf ein und di

b. h. bestimmten Ebene hin ist er übertrag.
ist verschieden je nach dem Koordinatensystem, .
de legt. Man kann nämlich, wie Sie wohl wiss
nicht kongruente, d. h. nicht zur Deckung zu br

rechtshändig.



linkshändig.



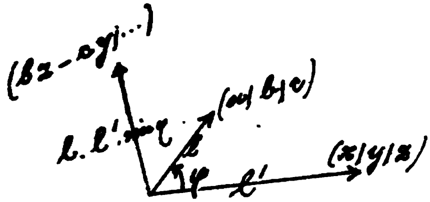
liche Koordinatensysteme
man die y- und z-Ach
Linie der x-Achs.

Diese Systeme s
bildlich symm
der, so wie rech
und in der Tat
demgemäß die

Gedächtnisregel auseinanderhalten
liegen bei dem einen Systeme so wie
Daumen, Zeige- und Mittelfinger .
dem andern, wie die gleichen Finge
Diese zweierlei Systeme werden in der
der gebraucht; in den verschieden
schiedenen Disciplinen und schl
nen Autoren herrscht verschiedener
zunächst den einfachsten Fall,
gleich den auf der x und y-A
heitsstrecken, so ist wegen i
torprodukt gleich der auf d

englischen Ursprunges ist. Die beiden Arten des Vectorproduktes, mit denen man gewöhnlich operiert, bezeichnet man jetzt meist als inneres (skalares) Produkt $ax+by+cz$, d. i. also bis aufs Vorzeichen der skalare Teil des obigen Quaternionenprodukts, und äusseres (vectorielles) Produkt $i(bz-cy)+j(cx-az)+k(ay-bx)$, d. i also der vectorielle Bestandteil desselben. So wollen wir denn auch beide Teile für sich geometrisch deuten.

Wir tragen beide Vectoren (a, b, c) und (x, y, z) als Strecken vom Anfangspunkte O ab; sie reichen dann bis zu den Punkten $a|b|c$ bzw. $x|y|z$



und haben die Längen $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, bzw. $l'=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ist φ der Winkel zwischen beiden Strecken, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, auf die ich hier wohl nicht einzugehen brauche, das innere Produkt

$$ax+by+cz=l\cdot l'\cdot\cos\varphi.$$

Das äussere Produkt ist selbst ein Vector, der, wie man ebenso leicht einsieht, auf der Ebene von l und l' senkrecht steht, und ferner ergibt sich als seine Länge der einfache Ausdruck $l\cdot l'\cdot\sin\varphi$.

Wesentlich ist nun noch die Entscheidung über den Sinn des Produktvectors, d. h. nach welcher Seite der durch

Wir erkennen nun sofort auch die Lösung des allgemeinen Problems der Division: aus $p.q = q'$ folgt durch Multiplikation mit $\frac{1}{p}$: $q = \frac{1}{p} \cdot q' = \frac{\bar{p}}{T^2} \cdot q'$, während die vertauschte Gleichung $q.p = q'$ die im allgemeinen verschiedene Lösung $q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \frac{\bar{p}}{T^2}$ hat.

Wir haben uns nun die Frage vorzulegen, ob es eine geometrische Deutung gibt, in der diese Operationen samt ihren Gesetzen als etwas Naturgemäßes erscheinen.

Um auf diese zu kommen, beginnen wir mit dem speziellen Falle, in dem beide Faktoren in einfache Vectoren übergehen, d. h. wo die skalaren Teile $w = d = 0$ sind. Dann reduziert sich die allgemeine Multiplikationsformel von S. 151 auf:

$$q' = p.q = (ia+jb+kc)(ix+jy+kz) = -(ax+by+cz) + i(bz-cy)+j(cx-az)+k(ay-bx),$$

d. h. das Produkt zweier auf einen Vector sich reduzierender Quaternionen besteht aus einem skalaren und einem vectoriellen Anteil. Wir können diese Anteile nun leicht mit den verschiedenen Arten der bei uns in Deutschland üblichen Vectormultiplikation in Verbindung bringen. Diese bei uns ungleich mehr als der Quaternionenkalkul verbreiteten Begriffe gehen auf Graßmann zurück, wiewohl das Wort Vector selbst

$$dw - ax - by - cz = 1$$
$$aw + dx - cy + bz = 0$$
$$bw + cx + dy - az = 0$$
$$cw - bx + ay + dz = 0.$$

Die Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems hängt bekanntlich von seiner Determinante ab, und hier liegt speciell eine sog. schiefsymmetrische Determinante vor, bei der symmetrisch zu der (von links oben nach rechts unten gehenden) Hauptdiagonale liegende Elemente entgegengesetzt gleich sind, während die Elemente der Hauptdiagonale unter sich gleich sind. Die Determinantentheorie lehrt solche Determinanten besonders einfach zu berechnen, und zwar findet man hier:

$$\begin{vmatrix} d, & -a, & -b, & -c \\ a, & d, & -c, & b \\ b, & c, & d, & -a \\ c, & -b, & a, & d \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2;$$

man kann sich davon auch durch direktes Ausrechnen überzeugen. In diesem Umstande, daß diese Determinante gerade gleich einer Potenz der Quadratsumme der 4 Komponenten von p wird, beruht die eigentliche Feinheit der Hamiltonschen Festsetzungen, denn nun folgt, daß die Determinante immer von 0 verschieden zu ersetzen, so müssen wir notwendig Uebereinstimmendes erhalten und daran kann sich auch nichts ändern, wenn wir nun auf beiden Seiten nachträglich die Multiplikationstabelle benutzen. Das associative Gesetz ferner muss, wie man leicht einsieht, allgemein gelten, wenn es nur für die Multiplikation der Einheiten gilt. Das wiederum entnimmt man unmittelbar der Multiplikationstabelle, wie ich nur an dem Beispiel

$$(ij)\,k = i\,(jk)$$

zeigen will; in der Tat hat man

$$(ij)\,k = k \cdot k = -1 \quad \text{und}$$
$$i\,(jk) = i \cdot i = -1. \text{ —}$$

Nun gehen wir zur <u>Division</u> über. Das genügt da, zu zeigen, <u>dass es zu jeder Quaternion $p = d + i\,a + j\,b + k\,c$ eine völlig bestimmte zweite q gibt, so dass:</u>

$$\underline{p \cdot q = 1};$$

wir werden zweckmässig dieses q als $\frac{1}{p}$ bezeichnen, und darauf dann die allgemeine Division leicht zurückführen können. Um nun dieses q zu bestimmen, setzen wir den obigen Ausdruck für $p \cdot q$ gleich $1 = 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ und erhalten durch Gleichsetzen der Komponenten die folgenden 4 Gleichungen für die 4 unbekannten Komponenten x, y, z, w von q:

Quaternionen

$$q' = p.q = (d+ia+jb+kc).(w+ix+jy+kz)$$

bilden, unter Beachtung dieser Reihenfolge der Faktoren. Multiplizieren wir Glied für Glied aus, ersetzen die Produkte der Einheiten aus unserer Multiplikationstabelle und ziehen sodann die Glieder mit gleichen Einheiten wieder zusammen, so ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = (&dw - ax - by - cz) \\ +\, i(&aw + dx + \underline{bz - cy}) \\ +\, j(&bw + dy + \underline{cx - az}) \\ +\, k(&cw + dz + \underline{ay - bx}) \end{aligned}}$$

Die Komponenten der Produktquaternion sind also bestimmte einfache *bilineare Kombinationen* der Komponenten der beiden Faktoren. Vertauscht man die Reihenfolge der Faktoren, so wechseln die 6 durch Unterstreichen hervorgehobenen Terme ihr Vorzeichen, so daß *$q.p$ im allgemeinen von $p.q$ wesentlich verschieden* ist, und zwar nicht etwa bloß im Vorzeichen, wie das für die Produkte der einzelnen Einheiten gilt.

Während das Kommutativgesetz also nicht erfüllt ist, gelten das *distributive und associative Gesetz unverändert*. Denn bilden wir uns zunächst einmal $p(q+q_1)$, andererseits $pq + pq_1$ durch formales Ausmultiplizieren, ohne noch die Produkte der Einheiten

Quaternionen *Hamilton* die 16 Produkte von je 2 Einheiten gleich setzt: Das erste ist, daß wir, wie ja schon die Bezeichnung andeutet, mit der ersten Einheit 1 wie mit der reellen Zahl 1 rechnen wollen, also:

$$1^2 = 1, \quad i.1 = 1.i = i, \quad j.1 = 1.j = j, \quad k.1 = 1.k = k.$$

Als wesentlich neu aber setzen wir für die Quadrate der andern 3 Einheiten fest

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

und für ihre binären Produkte:

$$j.k = +i, \quad k.i = +j, \quad i.j = +k,$$

während bei umgekehrter Stellung der Faktoren gelten soll:

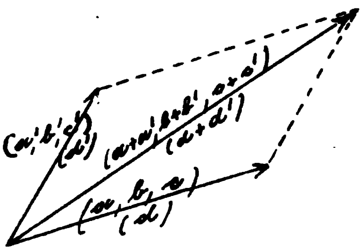
$$k.j = -i, \qquad i.k = -j, \qquad j.i = -k.$$

Hierbei fällt sofort ins Auge, daß *das kommutative Gesetz der Multiplikation allgemein nicht mehr erfüllt ist*, und diese Unannehmlichkeit muß man eben hier hinnehmen, um die Eindeutigkeit der Division, bezw. den Satz, daß ein Produkt nur verschwinden kann, wenn ein Faktor verschwindet, zu retten. *Daß das und obendrein alle anderen Gesetze der Addition und Multiplikation mit jener einen Ausnahme in der Tat erhalten bleiben, und daß jene einfachen Festsetzungen also äußerst zweckmäßig sind, werden wir sogleich zeigen.*

Zunächst wollen wir das *Produkt zweier allgemeinen*

Glieder ihren vectoriellen Bestandteil. –

Hinsichtlich der Addition der Quaternionen können wir den obigen allgemeinen Erörterungen kaum mehr etwas besonderes hinzufügen, und geben daher sogleich eine naheliegende geometrische Deutung an, die auf die Ihnen bekannte Deutung der Vectoren zurückgeht. Wir stellen uns nämlich die dem vectoriellen Bestandteil von q entsprechende Strecke mit den Projektionen a, b, c auf die Koordinatenachsen vor, und denken sie noch mit einem dem skalaren Bestandteil d gleichen Gewichte behaftet. Dann vollzieht sich die Addition von q und $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ so, daß man der nach dem bekannten Parallelogrammgesetz der Vectoraddition gebildeten Resultante der beiden Strecken die Summe der Gewichte als Gewicht zuschreibt, denn das ist dann in der Tat der Repräsentant der Quaternion



$$q + q' = (d+d') + i(a+a') + j(b+b') + k(c+c'). \text{ –}$$

Zu specifischen Eigenschaften der Quaternionen kommen wir erst, wenn wir uns der Multiplikation zuwenden, und zwar müssen sie, wie wir allgemein sahen, in den Festsetzungen über die Produkte der Einheiten enthalten sein. Ich gebe Ihnen also zunächst an, welchen *notwendig in Kauf nehmen muß*; dafür wählt man dann eine solche, die in dem in Betracht kommenden Zusammenhange weniger wichtig erscheint.

Alle diese allgemeinen Erörterungen verfolgen wir nun näher am Beispiele der *Quaternionen*, die wegen ihrer Anwendungen in der Physik und Mechanik wohl *das wichtigste höhere komplexe Zahlensystem* darstellen. Wie der Name zeigt, sind es *viergliedrige Zahlen (n = 4)*; als Abart schließen sie die *dreigliedrigen Vektoren* ein, die heute wohl allgemein bekannt sind, und von denen man auch vielleicht gar gelegentlich auf der Schule spricht.

Als erste der 4 Einheiten, aus denen wir die Quaternionen zusammensetzen, verwenden wir (wie bei den gewöhnlichen komplexen Zahlen) die *gewöhnliche reelle Einheit 1*. Die drei anderen Einheiten pflegt man nach Hamilton mit *i, j, k* zu bezeichnen, so daß die allgemeine Form der Quaternion ist:

$$\underline{q = d + i\,a + j\,b + k\,c},$$

wo *a, b, c, d reelle Parameter*, die *Koeffizienten der Quaternion* sind. Man nennt die erste, mit 1 multiplizierte Komponente d, die dem reellen Teil der gemeinen komplexen Zahl entspricht, den *skalaren Bestandteil der Quaternion*, den Inbegriff $a\,i + b\,j + c\,k$ der drei anderen besitzen; dann wird in der Tat

$$x \cdot y = \sum_{(l=1..n)} \Big(\sum_{(i,k=1..n)} x_i y_k c_{ikl} \Big) \cdot e_l$$

stets wiederum eine Zahl des Systems. In der Festlegung dieser Multiplikationsregel, d.h. des Schemas der Koeffizienten c_{ikl} liegt das Charakteristische eines jeden besonderen komplexen Zahlensystems. – Definiert man nun weiter naturgemäß die Division als inverse Operation der Multiplikation, so zeigt es sich, daß bei diesem allgemeinen Ansatze die Division nicht immer eindeutig ausführbar zu sein braucht, auch wenn der Divisor nicht verschwindet; denn die Bestimmung von y aus $x \cdot y = z$ geschieht durch Auflösung der n linearen Gleichungen $\sum_{(i,k)} x_i y_k c_{ikl} = z_l$ nach den n Unbekannten $y_1 \dots y_n$, und diese haben, falls ihre Determinante verschwindet, entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen; im gleichen Falle können auch alle $z_l = 0$ sein, ohne daß alle y_k verschwinden, d.h. das Produkt zweier Zahlen kann verschwinden, ohne daß ein Faktor Null ist. Nur durch geschickte spezielle Wahl der Größen c_{ikl} kann man hier Übereinstimmung mit dem Verhalten der gewöhnlichen Zahlen erzielen; freilich ergibt die nähere Untersuchung, daß man, wenn $n > 2$ ist, dafür die Abweichung von einer der anderen Rechenregeln

Komplexe Zahlen, etwa x und

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

dann und nur dann gleich nennen wird, we
Koefficienten der einzelnen Einheiten, die sog
nannten der Zahl, paarweise übereinstimmen

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 \dots \quad x_n = y_n$$

Ebenso naheliegend ist die Definition der Addi
Subtraktion, die diese Operationen einfach a
dieren und Subtrahieren der Komponenten zurü

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1) e_1 + (x_2 \pm y_2) e_2 + \dots + (x_n \pm y_n) e_n$$

Schwieriger und interessanter wird die Sache erst be
tiplikation. Wir werden da natürlich zunächst
allgemeinen Regeln des Buchstabenrechnens
ren, indem wir jeden $i$ten Term von x mit
$k$ten von y multiplicieren $(i, k = 1, 2 \dots n$

$$x \cdot y = \sum_{(i,k=1\dots n)} x_i y_k e_i e_k .$$

Damit das aber wiederum eine Zahl unseres
ist, es nötig, eine Regel zu besitzen, die die Produ
wiederum als komplexe Zahlen des Systems, d. h.
von Kombination der Einheiten darstellt; un
also n^2 Gleichungen der Form

$$e_i e_k = \sum_{(l=1\dots n)} c_{ikl} \cdot e_l \qquad (i, k = 1 \dots$$

2. Höhere komplexe Zahlen, insbesondere Quaternionen.

Kann man nun – diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch *andere, höhere komplexe Zahlen mit mehr neuen Einheiten*, als dem einen i, bilden und mit ihnen vernünftig rechnen? Hier haben zuerst um das Jahr *1840* unabhängig von einander *H. Graßmann* in Stettin und *W. R. Hamilton* in Dublin positive Resultate gewonnen; besonders mit der Erfindung Hamiltons, der *Quaternionenrechnung*, wollen wir uns im folgenden etwas eingehender beschäftigen. Zunächst noch kurz die allgemeine Problemstellung!

Die gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ können wir auffassen als aus den 2 verschiedenen „*Einheiten*" 1 und i mittelst der *reellen Parameter* x, y in der Form

$$x \cdot 1 + y \cdot i$$

gebildete *lineare Kombinationen*. Ebenso betrachten wir jetzt beliebig viele, etwa n, von einander verschiedene Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$, und bezeichnen als das aus ihnen gebildete *höhere komplexe Zahlensystem* die *Gesamtheit der mit n beliebigen reellen Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gebildeten Kombinationen:*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n .$$

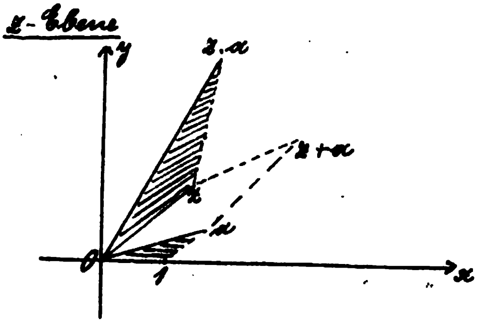
Es versteht sich ziemlich von selbst, daß man 2 solche

plexen Zahlen durch ihre geometrische Deutun
Nachdruck ausgesprochen wird, und durch
zuerst zu allgemeiner Geltung gelangte. In ei
vom Jahre 1831 beschäftigt sich Gauß mit d
sonders der ganzen komplexen Zahlen a + i b
ze reelle Zahlen sind, und überträgt auf sie
gewöhnlichen Zahlentheorie über Primfaktor
tische und biquadratische Reste et. c. Solch
meinerungen der Zahlentheorie haben wir obe
legentlich bei dem großen Fermatschen Satz
In der Selbstanzeige 1) dieser Abhandlung
sich nun über das, was er „wahre Metaphys
ginären Zahlen" nennt. Hier begründet er
tigung zum Operieren mit komplexen Zahl
aus damit, daß man ihnen und den Operat
ihnen jene anschauliche geometrische Deutun
er stellt sich also keineswegs auf den formale
punkt. Im übrigen sind diese längeren, seh
schriebenen Auseinandersetzungen von Gauß ä
wert. Ich erwähne nur noch, daß hier Gau
Wortes „imaginär" das klarere „komplexe" in Vorsc
das sich ja in der Tat auch vielfach eingebürgert

---

1) siehe Werke, Bd. II (Göttingen 1876) pag. 175.

dung ihrer Widerspruchsfreiheit sehen kann. Nun, es ist Ihnen wohl allen geläufig, und wir erwähnten es auch schon, wie man den Inbegriff der Punkte $(x|y)$ der Ebene eines x-y-Koordinatensystems als Deutung der Gesamtheit der komplexen Zahlen $x+iy$ auffaßt. Die Summe zweier Zahlen z, a folgt dann durch die bekannte Parallelogrammkonstruktion aus den entsprechenden beiden Punkten und dem Nullpunkt 0, während sich das



Produkt $z \cdot a$ unter Hinzunahme des Einheitspunktes 1 ($x=1, y=0$) durch Konstruktion eines zu $a01$ ähnlichen Dreieckes ergibt. Kurz gesagt wird die Addition $z' = z + a$ durch eine Parallelverschiebung der Ebene in sich, die Multiplikation $z' = z \cdot a$ durch eine Aehnlichkeitstransformation, d. h. Drehung und Streckung bei festem Nullpunkte dargestellt. Aus der Anordnung der den Zahlen entsprechenden Punkte in der Ebene ergibt sich übrigens sofort auch, was hier an Stelle der Monotoniegesetze der reellen Zahlen zu treten hat. Diese Andeutungen genügen wohl, um Ihnen die Sachlage voll ins Gedächtnis zurückzurufen.

Ich will hier nicht unterlassen, Sie auf die Stelle bei Gauß hinzuweisen, wo diese Begründung der kom-

Größe nach erscheinen; auf die modifizierte Fassung, die man dem Monotoniegesetz demgemäß geben muß, gehe ich der Kürze halber nicht ein.

4) Für die Multiplikation setzen wir fest, daß man wie mit gewöhnlichen Buchstaben rechnet, nur daß stets $i^2 = -1$ gesetzt wird, so daß also insbesondere:

$$(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy') + i\,(xy'+x'y)$$

ist. Dann gelten gleichfalls, wie leicht zu sehen, alle Gesetze der Multiplikation mit Ausnahme des Monotoniegesetzes.

5) Die Division ist als inverse Operation der Multiplikation definiert; insbesondere wird, wie die Probe ergibt:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Das ist stets ausführbar, außer für $x = y = 0$, d. h. es bleibt die schon im Gebiete der reellen Zahlen bestehende Ausnahmestellung der Division durch Null bestehen.

Nach alledem folgt, daß das Rechnen mit komplexen Zahlen unmöglich zu Widersprüchen führen kann, da wir es ja hier völlig auf die reellen Zahlen und die bekannten Operationen mit ihnen zurückgeführt haben, und die wollen wir für den Moment als widerspruchslos anerkennen.

Nach dieser rein formalen Betrachtung taucht natürlich die Frage auf, ob es nicht auch eine geometrische oder sonst anschauliche Deutung der komplexen Zahlen und der Operationen mit ihnen gibt, in der man eine anschauliche Begrünenglische Forscher in den dreißiger Jahren zurück, worüber Sie Näheres in dem schon (S. 66.) zitierten Buche von *Hankel* finden.

Über *diese beiden heut noch herrschenden Begründungsarten* will ich nun Einiges sagen. Stellen wir uns zunächst auf den *rein formalen Standpunkt*, nach dem nicht die Bedeutung der Dinge, sondern die innere Widerspruchslosigkeit der Operationsregeln die Richtigkeit der Begriffsbildungen gewährleistet. Die Einführung der komplexen Zahlen gestaltet sich dann so, wobei jede Spur von etwas Geheimnisvollem schwindet:

1) Die komplexe Zahl *$x + iy$ ist die Zusammenstellung zweier reeller Zahlen x, y*, ein *Zahlenpaar*, über das die weiterhin aufzuführenden Festsetzungen getroffen werden:

2) Zwei komplexe Zahlen $x + iy$, $x' + iy'$ heißen *gleich*, wenn $x = x'$, $y = y'$ ist.

3) *Addition und Subtraktion* wird definiert durch

$$(x + iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i(y \pm y').$$

Dann gelten *alle Regeln der Addition*, wie man leicht bestätigt, nur das *Monotoniegesetz* kann in der ursprünglichen Auffassung nicht mehr festgehalten werden, da die komplexen Zahlen von Hause aus nicht dieselbe einfache Anordnung besitzen, in der die natürlichen oder die reellen Zahlen ihrer bare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein." Im 18. Jahrhundert wird zwar das Begriffliche noch keineswegs aufgeklärt, dafür wird aber vor allem durch Euler die grundlegende Bedeutung der imaginären Zahlen in der Funktionentheorie erkannt; er stellt 1748 jene wunderbare Relation auf:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

durch die die innerliche Verwandtschaft der in der elementaren Analysis auftretenden Funktionsarten erkannt wird. Das 19. Jahrhundert endlich hat die begrifflich klare Erfassung des Wesens der komplexen Zahlen gebracht. Da ist zunächst die geometrische Interpretation hervorzuheben, auf die mehrere Forscher um die Jahrhundertwende etwa gleichzeitig geführt worden. Es genügt wohl, wenn ich unter diesen den hervorhebe, der gewiß am tiefsten in das Wesen der Sache eingedrungen ist, und der auch die nachhaltigste Wirkung auf das Publikum ausgeübt hat, nämlich unseren Gauß; er hat sich, wie das schon erwähnte Tagebuch unwiderleglich beweist, schon 1797 im vollen Besitz jener Interpretation befunden, aber sie freilich erst sehr viel später der Öffentlichkeit übergeben. Die zweite Errungenschaft des 19. Jahrhunderts ist die Schaffung einer rein formalen Begründung der komplexen Zahlen, die sie auf ganze Zahlen zurückführt; sie geht auf

IV. Die komplexen Zahlen.

1. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen.

Lassen Sie mich *einige wenige geschichtliche Daten* über ihre Entwicklung vorausschicken. Zum ersten Male sollen die imaginären Zahlen *1545* bei *Cardano* allerdings mehr beiläufig bei der Auflösung der kubischen Gleichung aufgetreten sein. In der weiteren Entwicklung können wir nun wieder die gleiche Bemerkung machen, wie bei den negativen Zahlen, *daß sich nämlich die imaginären Zahlen ohne und selbst gegen den Willen der einzelnen Mathematikers beim Operieren immer wieder von selbst einstellten und erst ganz allmählich in dem Maße, in dem sie sich als nützlich erwiesen, weitere Verbreitung fanden*. Freilich war den Mathematikern dabei recht wenig wohl zu Mute, die imaginären Zahlen behielten lange einen etwas *mystischen* Anstrich, so wie sie ihn heute noch für jeden Schüler haben, der zum ersten Male von jenem merkwürdigen $i = \sqrt{-1}$ hört. Ich erwähne als Beleg gern eine sehr charakteristische Äußerung von *Leibniz* aus dem Jahre *1702*, die etwa so lautet: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderser Beweisgang langsam und klar auseinanderzusetzen.

Zum Schluss will ich noch einige Literatur über die Fragen der regulären Polygone sowie überhaupt die bei dieser Gelegenheit berührten allgemeinen Fragen der geometrischen Konstruierbarkeit nennen. Zunächst kommt da wiederum Weber-Wellstein I (Abschn. 18 und 19), dann aber die kleine Festschrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie"[1] in Betracht, die ich 1895 gelegentlich einer Oberlehrerversammlung in Göttingen herausgegeben habe. Als einen sehr viel ausführlicheren und umfangreicheren Ersatz dieser im Buchhandel vergriffenen Schrift kann ich den soeben erschienenen Teil der deutschen Übersetzung des von F. Enriques in Bologna herausgegebenen Sammelwerkes „Fragen der Elementargeometrie"[2] nennen, in dem Sie sich genau über alle einschlägigen Fragen orientieren können.

Ich verlasse damit die zahlentheoretischen Erörterungen, indem ich den letzten Punkt, die Transzendenz von π für den Schluss der Vorlesung aufspare; ich habe im nächsten Kapitel über die letzten Erweiterungen des Zahlbegriffes systematisch zu sprechen, nämlich über:

1) Ausgearb. v. F. Tägert. Leipzig 1895.
2) deutsch v. H. Fleischer. T. II. Die geometr. Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig 1907.

Gleichung. Dann können wir unsere Schlussweise in der Tat nicht fortsetzen; die beiden andern Wurzeln müssen dann übrigens entweder gleichfalls rational sein, oder die Gestalt $P \pm Q\sqrt{R}$ haben, wo P, Q, R rationale Zahlen sind. Damit ist aber auch erwiesen, daß $f(x)$ in einen quadratischen und einen linearen rationalen Faktor zerfällt, und daher reduzibel ist. Jede irreduzible kubische Gleichung, und insbesondere unsere Gleichung des regulären Siebenecks ist also durch Quadratwurzeln nicht lösbar, und damit ist der Beweis vollendet, daß sich das reguläre Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

Sie sehen, wie einfach und durchsichtig dieser Beweis verläuft, und wie wenig Kenntnisse er eigentlich voraussetzt; immerhin verlangt einiges, besonders die Erörterungen über Klassifikation der Wurzelgrößen, doch ein gewisses Maß schwieriger mathematischer Abstraktion. Ob der Beweis also einfach genug ist, um einen der früher charakterisierten mathematischen Laien von der Vergeblichkeit seiner Versuche einer elementargeometrischen Lösung zu überzeugen, das wage ich nicht zu entscheiden; immerhin sollte man doch versuchen, einem solchen Manne die-

Daraus schließen wir aber weiter, daß auch

$$x_2 = P - Q\sqrt{R}$$

eine Wurzel der kubischen Gleichung (8) ist; denn der Vergleich mit den letzten Gleichungen gibt sogleich:

$$f(x_2) = M - N\sqrt{R} = 0.$$

Nun geht der Beweis sehr einfach und amüsant zu Ende: Ist x_3 die dritte Wurzel, so ist bekanntlich

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A, \text{ also ist}$$

$$x_3 = -A - (x_1 + x_2) = -A - 2P.$$

von demselben Range als P, und daher sicher von niederem Range als x_1.

Ist nun x_3 etwa bereits rational, so ist unser Theorem bewiesen. Wenn aber nicht, so können wir es zum Ausgangspunkt derselben Schlußreihe machen, und es ergibt sich, daß bei den andern Wurzeln der höhere Rang nur Schein gewesen sein muß; daß insbesondere eine von ihnen in Wahrheit einen noch niederen Rang hat, als x_3. So gehen wir nun weiter unter den 3 Wurzeln immer hin und her, und erkennen dabei jedesmal, daß ihr Rang tatsächlich eine Stufe geringer ist, als wir vorher geglaubt haben. Wir müssen daher notwendig schließlich auf eine Wurzel mit der Ordnung $\mu = 0$ kommen, d. h. wir erkennen tatsächlich die Existenz einer rationalen Wurzel der kubischen wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ höchstens noch $n-1$ Glieder μ^{ter} Ordnung enthalten, und R die Ordnung $\mu-1$ besitzt. Nun ist $\gamma - \delta\sqrt{R}$ jedenfalls von Null verschieden; denn sonst wäre $\sqrt{R} = \frac{\gamma}{\delta}$ durch die andern $(n-1)$ Glieder μ^{ter} Ordnung, die in x_1 auftreten, rational darstellbar, und daher überflüssig. Wir können daher mit $\gamma - \delta\sqrt{R}$ erweitern, und finden

$$x_1 = \frac{(\alpha+\beta\sqrt{R})(\gamma-\delta\sqrt{R})}{\gamma^2-\delta^2 R} = P + Q\sqrt{R},$$

wo P, Q rationale Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ sind, also höchstens $n-1$ Glieder μ^{ter} und sonst nur solche $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten, d. h. höchstens den Rang $(\mu, n-1)$ besitzen. Setzen wir diesen Wert von x_1 in (8) ein, so ergibt sich:

$$f(x_1) = (P+Q\sqrt{R})^3 + A(P+Q\sqrt{R})^2 + B(P+Q\sqrt{R}) + C = 0,$$

und wenn wir die Potenzen ausführen, folgt eine Relation von der Gestalt:

$$f(x_1) = M + N\sqrt{R} = 0,$$

wo M, N Polynome in P, Q, R, also rationale Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ sind. Wäre $N \neq 0$, so folgte $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$, d. h. es ließe sich rational durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und R darstellen, also durch höchstens $n-1$ Glieder μ^{ter} und andere $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; das ist aber, wie oben schon bemerkt, unmöglich. Also folgt notwendig

$N = 0$ und daher auch $M = 0$.

der n einfachen Ausdrücke μ ten Ordnung mehr sich durch die andern mit Hilfe von Ausdrücken niederer Ordnung rational darstellen läßt. Beispielsweise hat also der Ausdruck erster Ordnung

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

nicht 3 als Gliederzahl, sondern nur 2, da $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ist. Der oben angeführte Ausdruck α dritter Ordnung hat die Gliederzahl 1.

Wir haben damit jedem Quadratwurzelausdrucke 2 endliche Zahlen μ, n zugeordnet, die wir in dem Symbole (μ, n) als Charakteristik oder Rang des Wurzelausdruckes zusammenfassen. Von 2 Wurzelausdrücken verschiedener Ordnung schreiben wir dem niederer Ordnung auch den niederen Rang zu, von zweien gleicher Ordnung aber dem geringerer Gliederzahl. Die Ausdrücke niedersten Ranges sind demgemäß die der Ordnung Null, und das sind selbst rationale Zahlen.

Nun sei eine Wurzel x_1 der kubischen Gleichung (8) durch Quadratwurzeln darstellbar, und zwar durch einen Ausdruck vom Range (μ, n); indem wir eines der n Glieder μ ter Ordnung $\sqrt{R}$ bevorzugen, schreiben wir ihn

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\gamma + \delta\sqrt{R}},$$

anziehen lassen; alle andern denken wir bereits fortgeschafft.

Jeder solche Ausdruck ist eine rationale Funktion einer gewissen Anzahl von Quadratwurzeln, in unserm Beispiel von dreien, und wir wollen zunächst *eine einzige solche Quadratwurzel* betrachten, deren Radikand übrigens noch einen beliebig komplizierten Aufbau haben kann. *Unter ihrer Ordnung verstehen wir die größte in ihr auftretende Anzahl übereinandergestellter Wurzelzeichen*; so haben z. B. die im Zähler von x auftretenden Wurzeln die Ordnung 2 bezw. 1, die im Nenner stehende die Ordnung 3.

Bei einem *allgemeinen Quadratwurzelausdruck* fassen wir nun die *Ordnungszahlen der verschiedenen „einfachen Quadratwurzelausdrücke" der eben betrachteten Art* auf, aus denen er sich rational aufbaut, und *bezeichnen die größte unter ihnen* — sofern sich die betr. Wurzel nicht etwa reduzieren läßt — *als Ordnung μ des vorgelegten Ausdruckes*; in unserm Beispiele x ist $\mu = 3$. Nun können aber mehrere „einfache Quadratwurzelausdrücke" der Ordnung μ in unserm Ausdruck auftreten, und *ihre Anzahl n, die „Gliederzahl"*, fassen wir als *zweite charakteristische Anzahl auf*; sie ist so bestimmt gedacht, *daß keiner*

Der zweite Teil des Beweises wird jetzt darin bestehen, zu zeigen, daß eine irreduzible kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten nicht durch Quadratwurzeln lösbar ist; er ist wesentlich algebraischer Natur, doch wollen wir ihn des Zusammenhanges wegen gleich hier mit erledigen. Wir wollen die Behauptung so positiv wenden: Ist eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten A, B, C:

$$(8) \qquad f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

durch Quadratwurzeln lösbar, so hat sie sicher eine rationale Wurzel, d. h. sie ist reduzibel, denn die Existenz einer rationalen Wurzel α ist gleichbedeutend mit der Existenz eines rationalen Faktors $x - \alpha$ von $f(x)$ und also mit der Reduzibilität.

Diesem Beweise muß (und ist der wichtigste Punkt) eine Klassifikation aller durch Quadratwurzeln gebildeten Ausdrücke vorangehen, genauer gesagt, aller Ausdrücke, die aus endlich vielen Quadratwurzeln und rationalen Zahlen durch rationale Operationen aufgebaut sind; ein konkretes Beispiel ist:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c}}{\sqrt{d + \sqrt{e} + \sqrt{f}}},$$

wo $a, b \dots f$ rationale Zahlen sind. Natürlich reden wir immer nur von solchen Wurzeln, die sich nicht rational durch r^{2k} teilbar, also ist auch der zweite Summand $\frac{a \cdot n_1}{r^k}$ eine ganze Zahl, und da nach Voraussetzung n_1 nicht mehr durch r teilbar ist, muß der ganze Nenner r^k in a als Teiler enthalten sein. Damit ist die Behauptung (6) und, wie oben ausgeführt, auch das Gaußsche Lemma für unseren Fall bewiesen.

Es kommt also jetzt nur noch die Möglichkeit einer ganzzahligen Zerlegung

$$(7) \quad x^3+x^2-2x-1=(x^3+\beta x+\gamma)(x+\alpha)$$

in Betracht, wo α, β, γ ganze Zahlen sind. Um auch diese ad absurdum zu führen, genügt es, die konstanten Glieder beiderseits zu vergleichen:

$$-1 = \alpha \cdot \gamma$$

Eine solche Zerlegung der Einheit in ein Produkt ganzer Zahlen ist aber nur möglich, wenn $\alpha = \pm 1$ und $\gamma = \mp 1$. Dann würde aber in (7) die rechte Seite für $x = -\alpha = \mp 1$ verschwinden; die linke Seite aber verschwindet offenbar für keinen der beiden Werte $x = -1$ oder $x = +1$. So sind wir wiederum zu einem Widerspruch gekommen, aus dem wir auf die Unmöglichkeit der ganzzahligen Zerlegung (7) schließen. Also ist überhaupt auch eine Zerlegung in rationale Faktoren unmöglich, und die behauptete Irreduzibilität der kubischen Gleichung (2) ist bewiesen.

(6) a, b, c teilbar durch ν^k

sind, so können wir den Faktor ν^k aus den Koeffizienten der Zerlegung (3) in Zähler und Nenner fortheben, und auf alle weiteren Primfaktoren des übrigbleibenden Nenners n, das gleiche Verfahren anwenden; so folgt dann in der Tat schließlich, daß alle Primfaktoren von n und damit auch n selbst in a, b, c enthalten sind, womit unser Satz bewiesen wäre.

Um nun den gewünschten Schluß (6) zu ziehen, nehmen wir zuerst an, daß a nur durch eine niedere Potenz ν^{k_1} (wo $0 \le k_1 < k$) teilbar wäre. Dann folgt aus (5^a), daß c sicher mindestens durch ν^k und sogar durch eine höhere Potenz teilbar ist, denn sonst könnte das Produkt unmöglich durch die Potenz $2k > k + k_1$ teilbar sein. Daher ist der zweite Summand der ganzen Zahl (5^b) eine ganze Zahl, und deswegen muß es auch der erste $\frac{a\,b}{\nu^{2k}}$ sein; nach dem gleichen Schluß wie soeben ergibt sich daraus weiter, daß b gewiß durch die Potenz ν^k teilbar ist. Nun aber würde aus (5^a) folgen, daß auch a durch ν^k teilbar ist, weil sowohl $a + b$ als auch b es ist — und das steht im Widerspruch mit unserer Annahme.

Also ist diese falsch, und a muß gewiß durch ν^k teilbar sein. Danach folgt aus (5^a), genau wie zuletzt, daß auch b durch ν^k teilbar ist; in (5^b) ist nunmehr $a \cdot b$

konkreten Fall führen, zumal das genaue Durchdenken eines solchen allgemeinen Satzes an einem bestimmten Beispiel stets sehr nützlich ist. Wir beginnen damit, daß wir die drei rationalen Brüche α, β, γ auf ihren Generalnenner n bringen, und demgemäß die angenommene Zerlegung schreiben:

$$(3) \quad x^3+x^2-2x-1=\left(x^2+\frac{b}{n}x+\frac{c}{n}\right)\left(x+\frac{a}{n}\right),$$

wo jetzt a, b, c, n ganze Zahlen sind. Zu zeigen ist, daß $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ gleichfalls ganz sind, d. h., daß a, b, c sämtlich durch n teilbar sind. Indem wir die rechte Seite von (3) ausmultiplizieren, und mit der linken vergleichen, erhalten wir, daß die 3 Verbindungen:

$$(4^a) \quad \frac{a+b}{n}, \qquad (4^b) \quad \frac{ab}{n^2}+\frac{c}{n}, \qquad (4^c) \quad \frac{ac}{n^2}$$

notwendig ganze Zahlen sein müssen. Der einfachste zum Ziele führende Gedanke ist nun der, daß man an Stelle von n irgend einen Primfaktor r von n in Betracht zieht, und zwar möge er mit der Multiplicität k in n enthalten sein; es sei also $n = n_1 \cdot r^k$, wo n_1 nicht mehr den Primfaktor r als Teiler enthält. Aus (4) folgt dann durch Multiplikation mit n_1 bzw. n_1^2, daß auch die Werte

$$(5^a) \quad \frac{a+b}{r^k}, \qquad (5^b) \quad \frac{ab}{r^{2k}}+\frac{c\,n_1}{r^k}, \qquad (5^c) \quad \frac{a\cdot c}{r^{2k}}$$

ganze Zahlen sind. Könnten wir nun hieraus folgern, daß auch tischen und einen algebraischen Teil, und wir beginnen mit dem ersteren, der sich naturgemäß unserem zahlentheoretischen Zusammenhange einfügt. Wir zeigen zunächst, daß die kubische Gleichung (2) irreduzibel ist, d. h. daß ihre linke Seite nicht in Faktoren mit rationalzahligen Koeffizienten zerspalten werden kann. Bemerken wir vorab, daß ein Polynom dritten Grades überhaupt nur in einen quadratischen und in einen linearen Faktor zerfallen kann:

$$x^3+x^2-2x-1=(x^2+\beta x+\gamma)(x+\alpha);$$

zu zeigen ist, daß eine solche Zerlegung unmöglich ist, wofern α, β, γ rationale Zahlen sein sollen.

Der erste wesentliche Schritt dazu ist der Nachweis, daß wenn überhaupt eine solche rationale Zerlegung eines ganzzahligen Polynoms möglich ist, die α, β, γ sogar ganze rationale Zahlen sein müssen. Das ist ein spezieller Fall des von Gauß in den Disquis. arithm. aufgestellten allgemeinen wichtigen Lemmas: Zerfällt ein Polynom von der Gestalt $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a in ein Produkt zweier Polynome der Gestalt $\varphi(x)=x^r+b_1x^{r-1}+\dots+b_r$ mit rationalen Koeffizienten b, so sind diese Koeffizienten b notwendig gleichfalls ganze rationale Zahlen. Wir wollen den Beweis hier nur für den für uns in Betracht kommenden

Eine solche Gleichung kann man sofort auf eine der halben Gradzahl reduzieren, wenn man

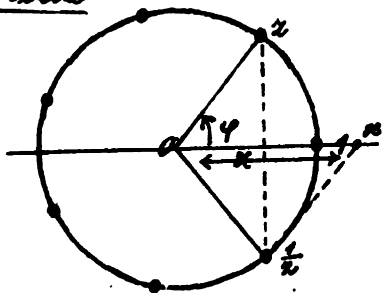
$$z + \frac{1}{z} = x$$

als neue Unbekannte einführt; eine leichte Rechnung ergibt für x die kubische Gleichung:

(2) $$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

und man sieht unmittelbar, daß die Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig durch Quadratwurzeln lösbar sind oder nicht. Übrigens kann man x sofort in direkte geometrische Beziehung zur Konstruktion des Siebenecks bringen; man erkennt nämlich, wie man an der Figur des Einheitskreises in der komplexen Ebene verfolgen möge, leicht folgendes:

z-Ebene



Bezeichnet man mit $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ den Zentriwinkel des regulären Siebenecks und berücksichtigt, daß $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ die $z = 1$ zunächst gelegenen Ecken des Siebenecks sind, so ist $x = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, und daher kann man nach Kenntnis von x das Siebeneck sofort konstruieren.

Wir haben nun zu zeigen, daß die kubische Gleichung (2) nicht durch Quadratwurzeln auflösbar ist. Dieser Beweis zerfällt in einen arithmereitet sind und wissen, woran Sie sich zu halten haben. Vielleicht kann es Ihnen dann von Nutzen sein, wenn Sie einen dieser Unmöglichkeitsbeweise in möglichst einfacher Form beherrschen.

So möchte ich Ihnen denn jetzt den Beweis dafür ausführlich vortragen, *daß das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann*. Es ist bekannt, daß jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal ihr rechnerisches Aequivalent in einer Folge übereinandergestellter Quadratwurzeln findet, und daß man umgekehrt jeden solchen Quadratwurzelausdruck durch Schneiden von Geraden und Kreisen geometrisch realisieren kann; Sie werden sich das leicht selbst überlegen können. Wir können unsere Behauptung also analytisch so formulieren, *daß die für das Siebeneck charakteristische Gleichung 6. Grades*

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

nicht durch eine Folge von endlich vielen Quadratwurzeln gelöst werden kann. Das ist nun eine sog. *reziproke Gleichung*, die mit z gleichzeitig auch immer $\frac{1}{z}$ zur Wurzel hat; man sieht das deutlich, wenn man sie in der Form schreibt:

$$(1) \qquad z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$$

seit dem Altertum zahlreiche Mathematiker vergeblich bemüht haben; ich erinnere neben der Konstruktion des Siebenecks nur an die Dreiteilung des Winkels oder die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal. Trotzdem aber gibt es massenhaft Leute, die sich immer wieder mit diesen Aufgaben beschäftigen, ohne von höherer Mathematik eine Ahnung zu haben und ohne die Problemstellung des Unmöglichkeitsbeweises auch nur zu kennen oder zu verstehen; ihren Kenntnissen gemäß, die sich meist auf Elementargeometrie beschränken, probieren sie es in der Regel mit dem Ziehen von Hilfslinien und Hilfskreisen, und häufen die schließlich so, daß kein Mensch sich mehr aus dem Gewirr herausfindet und dem Autor den Fehler seiner Konstruktion direkt nachweisen kann. Ein Hinweis auf den arithmetischen Unmöglichkeitsbeweis hilft auch meist nichts, da diese Leute höchstens einer direkten Berücksichtigung und Widerlegung ihres Beweises zugänglich sind. Jedes Jahr bringt jedem nur einigermaßen bekannten Mathematiker eine ganze Menge solcher Zusendungen, und auch an Sie werden einst, wenn Sie im Leben drin stehen, solche Beweise herantreten; es ist gut, wenn Sie von vornherein auf diese Erlebnisse vorbesicht dieses Tagebuch muss jeden Mathematiker aufs höchste interessieren, da es auch weiterhin die Entstehung von Gauss' hervorragenden Arbeiten in der Zahlentheorie, den elliptischen Funktionen u. s. f. genau verfolgen lässt.

Die erste Publikation dieser ersten grossen Entdeckung von Gauss erfolgte in einer kurzen Mitteilung in der „Jenaer Literaturzeitung" vom 1. Juli 1796, veranlasst von Gauss' Lehrer und Gönner, dem Hofrat Zimmermann zu Braunschweig und begleitet von einer kurzen persönlichen Note desselben.[1] Den Beweis hat Gauss erst in der grundlegenden zahlentheoretischen Schrift, den „Disquisitiones arithmeticae"[2] von 1801 veröffentlicht; dort findet sich auch zum ersten Mal der in jener Note noch fehlende negative Teil des Satzes, dass für andere Primzahlen als die in $2^{2^n}+1$ enthaltenen die Kreisteilung nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Von diesen wichtigen Unmöglichkeitsbeweise will ich Ihnen hier einen Fall vorführen, um so lieber als im grossen Publikum so wenig Verständnis für solche Unmöglichkeitsbeweise vorhanden ist. Die moderne Mathematik hat durch solche Unmöglichkeitsbeweise eine ganze Reihe berühmter Probleme erledigen können, um deren Lösung sich

1) Abgedruckt gleichfalls in Math. Ann. 57, pag. 6 (1903)
2) Abgedruckt Werke Bd. I (1870)

die Kreisteilung mit Lineal und Zirkel möglich sei, aber für keine anderen. Für die ersten Werte $\mu = 0, 1, 2, 3$, ergibt diese Formel in der Tat Primzahlen und zwar

$$3,\ 5,\ 17,\ 257;$$

davon sind die ersten beiden Fälle bereits bekannt, während die beiden andern wesentlich Neues liefern. Besonders berühmt ist das *reguläre Siebzehneck*, dessen Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal hier zum ersten Mal bewiesen ist. Uebrigens ist nicht allgemein bekannt, für welche μ die obige Formel Primzahlen liefert. Auf Details will ich auch hier wieder nicht eingehen, sondern lieber das allgemeine Milieu und die Bedeutung dieser Entdeckung schildern; Näheres über das reguläre Siebzehneck finden Sie bei Weber-Wellstein.

Ich möchte Sie hier besonders auf das im *57. Bande der mathematischen Annalen* abgedruckte *Gaußsche Tagebuch* aufmerksam machen; das ist ein kleines unscheinbares Heft, das Gauß von 1796, kurz vor seinem 19. Geburtstage beginnend geführt hat. Gerade die erste Eintragung bezieht sich auf die Möglichkeit der Konstruktion des 17-Ecks (März 1796); mit dieser frühzeitigen bedeutenden Entdeckung reifte in Gauß erst der Entschluß, sich endgültig der Mathematik zu widmen. Die Durch-der n Teilpunkte; dann genügen die den n Ecken zugehörigen komplexen Zahlen:

$$z = x + iy = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \qquad (k = 0, 1 \ldots n-1)$$

nach dem Moivreschen Satze der Gleichung

$$z^n = 1,$$

und damit ist die Aufgabe der Kreisteilung auf die Lösung dieser einfachen algebraischen Gleichung zurückgeführt. Da sie stets die rationale Wurzel $z = 1$ hat, ist $z^n - 1$ durch $z - 1$ teilbar, und für die übrigen $n - 1$ Wurzeln bleibt die Gleichung

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0,$$

die sog. Kreisteilungsgleichung, eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei der alle Koeffizienten gleich $+1$ sind.

Aus dem Altertum stammt das Interesse für die Frage, welche regulären Polygone man mit Lineal und Zirkel konstruieren kann. Es war auch im Altertum schon bekannt, daß das für $n = 2^h, 3, 5$ (bei beliebigem ganzzahligen h), und ebenso für die zusammengesetzten Werte $n = 2^h \cdot 3$, $n = 2^h \cdot 5$, $n = 2^h \cdot 3 \cdot 5$ möglich ist. Auf diesem Punkte blieb das Problem bis zum Ende des 18. Jahrhunderts stehen, wo sich der junge Gauß mit ihm beschäftigte. Er fand, daß noch weiterhin für alle Primzahlen von der Form

$$p = 2^{(2^h)} + 1$$

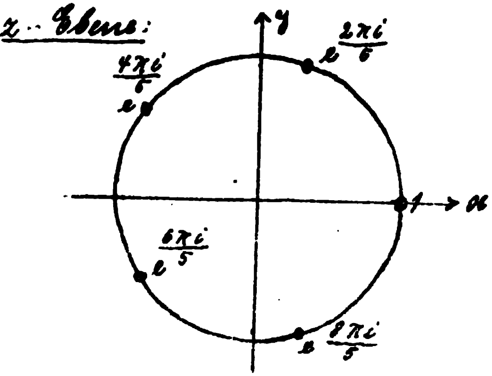
etwas ganz Verkehrtes herauskommt. Ein besonders abschreckendes Beispiel aus diesem Wust von Unsinn herauszugreifen, kann ich mir nicht versagen: Ein Mann dem das Zeichen > unbekannt ist, liest statt

$$x^n + y^n = z^n \; (n > 2) \quad \text{Folgendes:}$$

$$x^n + y^n = z^n . \, (n + 2),$$

und kann nun natürlich schon für $n = 1$, d.h. für $x + y = z . 3$ Lösungen sofort angeben; das schickt er ein und hält die Mathematiker für so dumm, daß sie darauf einen so hohen Preis aussetzen!

Ich schließe damit die Erörterungen über den Fermatschen Satz und komme zum <u>achten Punkt</u> meiner Aufzählung, dem <u>Probleme der Kreisteilung</u>. Ich darf wohl hierbei bereits das Operieren mit komplexen Zahlen $x + iy$ und ihre Darstellung in der komplexen x-y-Ebene als Ihnen allen bekannt benutzen, obwohl wir systematisch erst später darauf kommen werden. Es handelt sich nun um das <u>Problem, den Kreis in n gleiche Teile zu teilen oder ein reguläres n-Eck zu konstruieren</u>. Wir identifizieren nun diesen Kreis mit dem Einheitskreis um den Nullpunkt der komplexen x-y-Ebene, und nehmen $x + iy = 1$ als ersten



nung hinterlassen hat für den Glücklichen, der entweder den Fermatschen Satz allgemein beweist, oder ihn durch Angabe eines einzigen Gegenbeispieles widerlegt. Freilich ist das Auffinden eines solchen keine so einfache Sache, da der Satz für Exponenten unter 100 ja schon bewiesen ist, und man also mit ungemein großen Zahlen zu rechnen anfangen muß.

Wie der Mathematiker, der die Sache und die Anstrengungen von Kummer und seinen Nachfolgern bei ihren Beweisversuchen kennt, über die Schwierigkeit der Gewinnung dieses Preises denken muß, geht aus meinen vorigen Erörterungen hervor. Das große Publikum ist freilich anderer Meinung. Seit im Spätsommer dieses Jahres die Nachricht von dem Preise durch die Zeitungen ging – die übrigens nicht zur Veröffentlichung autorisiert waren – ist bei mir schon ein ungeheurer Stoß von „Beweisen" eingelaufen; Leute aller Berufstände, Ingenieure, Volksschullehrer, Geistliche, ein Bankier, viele Damen u. s. f. sind an diesen Einsendungen beteiligt. Allen gemeinsam ist nur das, daß sie keine Ahnung von der ernsten mathematischen Bedeutung des Problemes haben, daß sie auch nicht den Versuch machen, sich darüber zu informieren, sondern durch einen plötzlichen Einfall die Sache zu machen versuchen, wobei natürlich ausnahmslos-operieren gekonnt haben zu einer Zeit, wo man sich nicht einmal sicher über das Imaginäre orientiert war, und wo die Zahlentheorie selbst noch recht unentwickelt war, und erst gerade durch Fermat weitgehende Anregungen bekam. Andererseits ist es auch nicht wahrscheinlich, daß ein Mathematiker vom Range Fermats einen Fehler in seinem Beweise begangen hat, wenngleich solche Fehler auch schon bei den größten Mathematikern vorgekommen sind. Wir müssen also wohl glauben, daß ihm der Beweis durch einen besonders glücklichen einfachen Gedanken gelungen ist. Da wir für dessen Wiederfindung keinen Anhalt mehr haben, so ist ein vollständiger Beweis des Fermatschen Satzes wahrscheinlich nur durch systematische Weiterführung der Arbeiten Kummers zu erwarten.

Diese Fragen sind jetzt besonders aktuell, da, wie in Ihren Kreisen wohl auch genugsam besprochen wird, unsere Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften jetzt einen Preis von 100 000 Mark für die Erledigung des Fermatschen Satzes zur Verfügung hat. Er ist ein Legat des vor etwa einem Jahre verstorbenen Mathematikers Wolfskehl in Darmstadt, der sich wahrscheinlich sein Leben lang mit dem Fermatschen Satz beschäftigt hat, und nun aus seinem großen Vermögen diese Stif-

Begriffen der Teilbarkeit, der Faktorenzerlegung u. s. w. beruhen; man spricht demgemäß von *ganzen algebraischen Zahlen* und hier speziell von *Kreisteilungszahlen*, wegen der Beziehung der Zahl ε zur Kreisteilung. *Der Fermatsche Satz ist also für Kummer ein Theorem über die Faktorenzerlegung der algebraischen Kreisteilungszahlen*, und aus deren Theorie versucht er einen Beweis für ihn abzuleiten. *Das ist ihm nun in der Tat für die Mehrzahl aller Werte n geglückt*, insbesondere z. B. für alle Werte von n unter 100; unter den größeren Zahlen jedoch finden sich *Ausnahmewerte*, für die ihm und auch den neueren Mathematikern, die seine Untersuchungen fortführten, der Beweis bis jetzt nicht gelungen ist. Ich muß mich hier natürlich mit diesen Andeutungen begnügen, nähere Angaben über den Stand des Problemes finden Sie in der mathematischen Encyklopädie, Bd I_2, pag. 714, am Ende des Referates von *Hilbert, über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Hilbert selbst gehört zu denen, die die Kummerschen Untersuchungen fortgesetzt und ausgedehnt haben.

Daß freilich Fermats „wunderbarer Beweis" in dieser Richtung gelegen hat, kann kaum angenommen werden; denn er wird kaum mit algebraischen Zahlen und $\xi = 1,\ \eta = 0$ bzw. $\xi = 0,\ \eta = \pm 1$ und $\xi = \pm 1,\ \eta = 0$. Die Fermatsche Behauptung besagt nun, daß diese Kurven – im Gegensatz zu dem vorhin betrachteten Kreise – sich durch die überall dicht liegende Menge der rationalen Punkte hindurchschlängeln, ohne sonst auch nur einen einzigen noch zu treffen.

Das Interesse dieses Satzes beruht vor allem darauf, daß ein vollständiger Beweis von ihm bisher trotz aller Anstrengungen noch nicht gelungen ist. Was Beweisversuche anlangt, ist vor allem Kummer zu nennen, der das Problem sehr wesentlich förderte, indem er es mit der Theorie der „algebraischen" Zahlen in Verbindung brachte, insbesondere zunächst mit der Theorie der „Kreisteilungszahlen". Unter Benutzung der n^{ten} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ kann man nämlich $z^n - y^n$ in n Linearfaktoren spalten und erhält für die Fermatsche Gleichung:

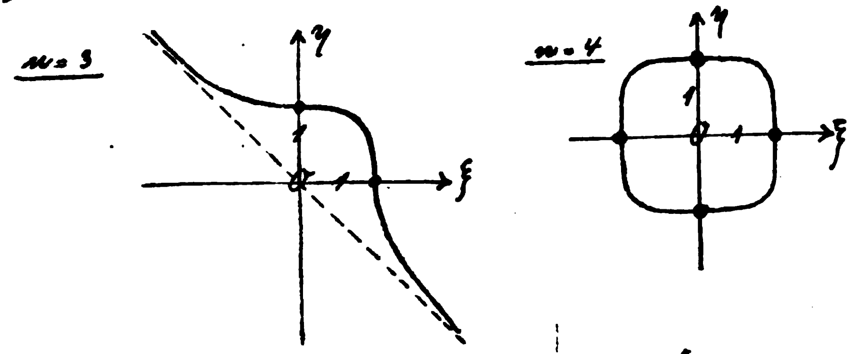
$$x^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)\ldots(z-\varepsilon^{n-1}y),$$

d. h. es soll die n^{te} Potenz der ganzen Zahl x in n Faktoren zerlegt werden, die aus 2 ganzen Zahlen y, z und der Zahl ε in der angedeuteten Weise aufgebaut sind. Für solche Zahlen entwickelte nun Kummer ganz ähnliche Theorien, wie man sie für die gewöhnlichen ganzen Zahlen von altersher kennt, und die auf dem hat nichts publiziert – von seinem Sohne veröffentlicht. Da steht auch der grosse Satz, der uns jetzt beschäftigt und dazu schreibt Fermat, „er habe einen wirklich wunderbaren Beweis gefunden, den er jedoch aus Mangel an Platz nicht mit angeben könne.“[1] Es ist bis heute nicht gelungen einen Beweis dieses Satzes zu finden!

Um uns über die Aussage dieses Fermatschen Satzes etwas näher zu orientieren, fragen wir wie bei $n = 2$ zunächst nach den <u>rationalen</u> Lösungen der Gleichung

$$\xi^n + \eta^n = 1,$$

d. h. nach der Lage der dadurch dargestellten Kurven zu der Gesamtheit der rationalen Punkte der ξ - η - Ebene:



Für $n = 3$ und $n = 4$ ist dies ungefähr das Aussehen der Kurven; sie enthalten jedenfalls die Punkte $\xi = 0, \eta = 1$

---

1) vgl. die Fermatausgabe der Pariser Akademie: Oeuvres de Fermat T. III (Paris 1896) pag. 241.

ben zweier ganzer Zahlen wieder ein Kubus; oder daß die Summe zweier Biquadrate wieder ein Biquadrat ist u.s.f., oder allgemein: Ist für beliebiges ganzzahliges n die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen Zahlen lösbar? Diese Frage hat Fermat eben durch das nach ihm benannte Theorem verneinend beantwortet: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für keinen ganzzahligen Wert von n außer für $n = 2$ in ganzen Zahlen lösbar. Gestatten Sie zunächst einige historische Notizen: Fermat lebte von 1608 bis 1665 und war in Toulouse Parlamentsrat, also Jurist. Er beschäftigte sich aber viel und in fruchtbarster Weise mit mathematischen Fragen, so daß man ihn wohl mit zu den größten Mathematikern rechnen kann. Fermats Name verdient unter den Begründern der analytischen Geometrie, der Infinitesimalrechnung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung an hervorragender Stelle genannt zu werden; besonders bedeutend aber sind seine zahlentheoretischen Leistungen. Alle seine Resultate sind als Randbemerkungen zu seinem Handexemplar des Diophant hinterlassen, des großen antiken Zahlentheoretikers, der um 300 n. Chr. also etwa 600 Jahre nach Euklid, in Alexandria lebte; es wurde erst 5 Jahre nach seinem Tode – er selbst nalen Punkte des Kreises durch die Formeln (5) bei beliebigem rationalem λ dargestellt sind. Damit ist unsere Aufgabe gelöst, und wir haben nur noch den Uebergang zu den ganzen Zahlen zu machen. Wir setzen dazu

$$\lambda = \frac{n}{m}$$

wo n, m ganze Zahlen sein mögen, und haben aus (5):

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \qquad \eta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

als Inbegriff aller rationalen Lösungen von (3). Sämtliche ganzzahligen Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1), d. h. alle pythagoräischen Zahlen sind also in der Form

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

gegeben, und zwar erhält man alle teilerfremden Lösungen, wenn m, n alle Paare teilerfremder ganzer Zahlen durchläuft. Wir haben damit eine sehr anschauliche Ableitung dieses sonst so abstrakt erscheinenden Resultates erhalten.

Zum Abschluss hieran will ich noch auf den „großen Fermatschen Satz" zu sprechen kommen. Er liegt ganz im Sinne der alten Geometer, wenn man die Fragestellung der pythagoräischen Zahlen aus der Ebene in den Raum von 3 und mehr Dimensionen in folgender Weise überträgt: Ist es möglich, daß die Summe der Kudung:

$$(4) \qquad \eta = \lambda(\xi + 1)$$

dargestellt werden, und nennen den einzelnen Strahl *rational* oder *irrational*, je nachdem der Parameter λ rational ist oder nicht. Nun gilt der Doppelsatz, *daß jeder rationale Punkt des Kreises aus S durch einen rationalen Strahl projiziert wird und daß jeder rationale Strahl (4) den Kreis in einem rationalen Punkte schneidet.* Die erste Hälfte ist wohl unmittelbar klar. Die zweite beweisen wir durch direkte Rechnung, indem wir (4) in (3) einsetzen; wir erhalten dann für die Abscisse des Schnittpunktes die Gleichung:

$$\xi^2 + \lambda^2(\xi+1)^2 = 1, \text{ oder}$$

$$(1+\lambda^2)\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Eine Lösung $\xi = -1$ dieser Gleichung entsprechend dem Schnitte S kennen wir, für die andere ergibt sich durch eine kleine Rechnung.

$$(5^a) \qquad \xi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

und aus (4) folgt als zugehörige Ordinate:

$$(5^b) \qquad \eta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2};$$

das ist bei rationalem λ in der Tat ein rationaler Punkt.

Unser nunmehr vollständig bewiesener Doppelsatz läßt sich auch dahin aussprechen, *daß alle ratio-*

(1.) $a^2+b^2=c^2$,

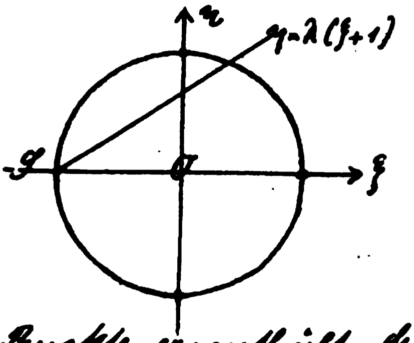
deren ganzzahlige Lösungen gesucht werden, betrachten wir, indem wir

(2) $\frac{a}{c}=\xi,\ \frac{b}{c}=\eta$

setzen, die Gleichung

(3) $\xi^2+\eta^2=1$

und haben nun die Aufgabe, alle rationalen Zahlenpaare ξ, η zu bestimmen, die ihr genügen. Wir gehen demgemäß von der Vorstellung aller rationalen Punkte ξ, η (d. h. aller Punkte mit rationalen Koordinaten ξ und η) aus, die die ξ-η-Ebene überall dicht erfüllen. Nun stellt $\xi^2+\eta^2=1$ den Einheitskreis in dieser Ebene um den Nullpunkt dar, und unsere Aufgabe kommt auf die Frage hinaus, wie sich dieser Kreis zwischen den überall dicht liegenden rationalen Punkten hindurchwindet, insbesondere, welche dieser Punkte er enthält.



Einige solcher Punkte kennen wir von Haus aus, nämlich die Schnittpunkte mit den 4 Achsen, von denen wir vorzugsweise den Punkt S ($\xi=-1,\ \eta=0$) betrachten wollen. Wir denken uns nun sämtliche Strahlen durch S, die durch die Glei-

und zwar gehören zu dem linken Polygon die Näherungsbrüche mit geraden, zu dem rechten die mit ungeraden Indices. Damit hat man eine neue, und, wie man wohl sagen muss, äusserst anschauliche geometrische Definition der Kettenbruchentwicklung. Die obige Figur ist für den Fall

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

entworfen, d. i. der Irrationalität des regulären Zehnecks; hier sind die ersten Ecken der beiden Polygone:

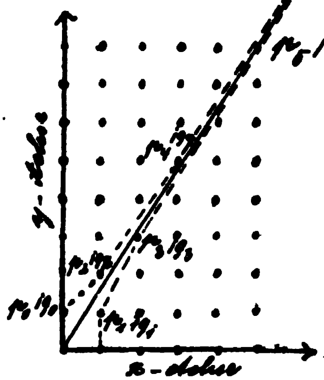
links: $p_0 = 0 \mid q_0 = 1$; $p_2 = 1 \mid q_2 = 2$; $p_4 = 3 \mid q_4 = 5$ . . . . .

rechts: $p_1 = 1 \mid q_1 = 1$; $p_3 = 2 \mid q_3 = 3$; $p_5 = 5 \mid q_5 = 8$ . . . . .

Für π wachsen die Werte p_ν, q_ν weit rascher, so dass man in concreto die Figur kaum wird entwerfen können. Den Beweis unseres Theorems, auf den ich hier nicht weiter mehr eingehen kann, finden Sie ganz ausführlich in meiner genannten autographierten Vorlesung dargestellt.

Ich gehe nun zur Behandlung des *siebenten Punktes*, der *pythagoräischen Zahlen*, über; hier werden wir die Raumanschauung in etwas anderer Form benutzen. Statt der Gleichung wie wir in Erinnerung an Dedekinds Definition der Irrationalzahl sagen können, einen *Schnitt im Gebiete aller ganzzahligen Punkte*, indem sie einen *links- und einen rechts-gelegenen Punkthaufen* scheidet. Fragen wir nun, wie diese beiden Punkthaufen sich gegen unseren Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ abgrenzen, so ergibt sich eine äusserst interessante Beziehung zur Kettenbruchentwickelung von ω. Markieren wir nämlich zu jedem der Näherungsbrüche $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ den Punkt $x = p_\nu$, $y = q_\nu$ (wo p_ν, q_ν teilerfremd), so müssen die Strahlen nach diesen Punkten den Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ immer besser abwechselnd von oben und unten approximieren, in demselben Masse, wie die $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ den Wert ω approximieren; darüber hinaus findet man folgendes Theorem, wenn man die bekannten zahlentheoretischen Eigenschaften der p_ν, q_ν benutzt: *Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt*, wie etwa bei dem sog. chinesischen Billard, *und umschlingen den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahles mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte $p_\nu \mid q_\nu$, die Zähler und Nenner der successiven Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben*, schlossen wird.

Wir wollen nun diese Dinge durch geometrische Bilder beleben. Wir denken uns dazu im positiven Quadranten der x-y-Ebene – wenn wir uns auf die Betrachtung positiver Zahlen beschränken wollen – alle Punkte mit ganzzahligen Koordinatenwerten markiert, die ein sog. Punktgitter bilden. Betrachten wir dieses Gitter, ich möchte fast sagen diesen „Sternhimmel" von Punkten einmal vom Koordinatenanfangspunkt O aus. Der



Leitstrahl von O nach dem Punkte $x = a/y = b$ hin hat die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

und umgekehrt liegen auf jedem solchen Strahle $\frac{x}{y} = \lambda$ mit rationalem $\lambda = \frac{a}{b}$ unendlich viele ganzzahlige Punkte $(m \cdot a / m \cdot b)$, wo m eine beliebige ganze Zahl. Man sieht daher von O aus in allen rationalen Richtungen und nur in diesen Punkte unseres Gitters; das Gesichtsfeld ist überall dicht, aber doch nicht lückenlos kontinuierlich mit „Sternen" erfüllt, es ist gleichsam eine „Milchstraße". – Auf einem irrationalen Strahle $\frac{x}{y} = \omega$, wo ω irrational, liegt also außer O selbst kein einziger ganzzahliger Punkt, was an sich schon recht bemerkenswert ist. Offenbar aber macht eine solche Gerade, Näherungsbrüche von ω:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots\ldots;$$

sie stellen außerordentlich gute Näherungswerte für die Zahl ω dar, und zwar gibt – genauer gesagt – jeder einzelne von ihnen die beste Annäherung, die man mit irgend einem rationalen Bruch von nicht größerem Nenner überhaupt erzielen kann. Diese Eigenschaft macht die Kettenbruchtheorie überall da praktisch wichtig, wo es sich darum handelt, Irrationalzahlen oder Brüche mit sehr großen Nennern (etwa Dezimalbrüche mit vielen Stellen) durch möglichst einfache Brüche – soll heißen Brüche mit möglichst kleinen Nennern – möglichst gut zu approximieren. Wie gut die Annäherung tatsächlich wird, sehen Sie aus folgender Umrechnung der ersten Näherungsbrüche von π in Dezimalbrüche, wenn Sie sie mit der Dezimalentwicklung $\pi = 3{,}14159265\ldots$ vergleichen:

$$\frac{p_0}{q_0} = 3 \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots\ldots$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots;$$

Sie bemerken übrigens in diesem Beispiele, daß die Näherungsbrüche immer abwechselnd kleiner und größer als π sind; das ist bekanntlich auch allgemein der Fall, so daß also durch die Kettenbruchentwicklung ω alternierend von unten und oben in immer engere Grenzen eingegegebenen positiven Zahl ω entsteht: Wir sondern die größte ganze positive in ω enthaltene Zahl n_0 ab, indem wir schreiben:

$$\omega = n_0 + r_0 , \quad \text{wo } 0 \leq r_0 < 1,$$

Behandeln $\frac{1}{r_0}$ ebenso wie ω:

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1 , \quad \text{wo } 0 \leq r_1 < 1,$$

und gehen ebenso weiter:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2 , \quad 0 \leq r_2 < 1$$

$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3 , \quad 0 \leq r_3 < 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Der Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten ab, wenn ω rational ist, und ist sonst unbegrenzt fortsetzbar. In jedem Falle schreiben wir kurz als „Kettenbruchentwicklung" von ω:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdot$$

Als Beispiel führe ich die Kettenbruchentwicklung für π an:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \cdot$$

Bricht man den Kettenbruch nach dem 1., 2., 3. . . . Teilnenner ab, so erhält man rationale Brüche, die

Höchstwert $\delta = p-1$ tritt bei

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ \ 142857\ldots$$

auf $(\delta = 6)$; in der Tat sind modulo 7 $10^1 = 3$, $10^2 = 2$, $10^3 = 6$, $10^4 = 4$, $10^5 = 5$ und erst $10^6 = 1$.

Ich will weiter in ähnlicher Weise über den *sechsten Punkt* meiner Aufzählung, *die Kettenbrüche*, sprechen. Dabei werde ich aber nicht die übliche abstrakte arithmetische Darstellung geben, die Sie anderwärts, z. B. im Weber-Wellstein, bevorzugt finden, sondern ich will Ihnen gerade hieran zeigen, ein wie klares und leichter verständliches Ansehen zahlentheoretische Dinge durch eine *geometrisch-anschauliche Darstellung* erhalten. Übrigens lenken wir mit dieser Verwendung geometrischer Hilfsmittel in der Zahlentheorie eigentlich nur in die alten Bahnen von *Gauß* und *Dirichlet* wieder ein; erst die neueren Mathematiker von 1860 etwa an haben diese Methoden wieder aus der Zahlentheorie verbannt. Natürlich kann ich hier nur die *wichtigsten Gedankengänge und Theoreme ohne Beweise* kurz angeben, wobei ich auch annehme, daß Sie der elementaren Theorie der Kettenbrüche nicht ganz fremd gegenüberstehen; eine eingehende Darstellung enthält übrigens meine autographierte zahlentheoretische Vorlesung.

Sie wissen, wie die *Kettenbruchentwicklung* einer daß die Dezimalstellen von $\frac{1}{p}$ bei dieser Operation ungeändert bleiben, d.h. aber nichts als daß der Dezimalbruch $\frac{1}{p}$ durch fortgesetzte Wiederholung derselben „Periode" von δ Ziffern entsteht. Um nun zu erkennen, daß es keine kleinere Periode von $\delta' < \delta$ Ziffern gibt, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Ziffernanzahl δ' jeder Periode der Kongruenz $10^{\delta'} \equiv 1$ genügen muß; denn wir wissen ja, daß δ die kleinste Lösung dieser Kongruenz war. Dieser Beweis ergibt sich aber durch einfache Umkehrung des vorigen Gedankenganges: aus der Annahme folgt, daß $\frac{1}{p}$ und $\frac{10^{\delta'}}{p}$ in den Dezimalstellen übereinstimmen, also ist $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ eine ganze Zahl N und daher $10^{\delta'} - 1$ durch p teilbar, also in der Tat $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$. Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Ich gebe Ihnen noch einige möglichst einfache instruktive Beispiele dazu an, aus denen Sie ersehen mögen, daß δ die verschiedensten Werte, kleiner und gleich $p-1$, wirklich annehmen kann. Bemerken Sie zuerst, daß für

$$\frac{1}{3} = 0,33\ldots$$

die Stellenzahl $\delta = 1$ ist, und in der Tat ist bereits $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$. Ferner finden Sie für

$$\frac{1}{11} = 0,0909\ldots$$

$\delta = 2$, und entsprechend $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$. Der anzahl δ seiner Periode der kleinste Exponent ist, für den 10^δ durch p geteilt den Rest 1 läßt, oder zahlentheoretisch gesprochen: δ ist der kleinste Exponent, der der „Kongruenz" genügt:

$$10^\delta \equiv 1 \pmod{p}.$$

Der Beweis erfordert zunächst die Erkenntnis, daß diese Kongruenz überhaupt stets möglich ist, und die vermittelt uns der sog. kleine Fermatsche Satz, daß nämlich für jede zu 10 teilerfremde Primzahl p

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist; auf den Beweis dieses fundamentalen Satzes, der zum ständigen Werkzeug eines jeden Mathematikers gehört, will ich hier nicht erst eingehen. Weiterhin müssen wir noch aus der Zahlentheorie entnehmen, daß der in Frage stehende kleinste Exponent δ entweder $p-1$ selbst oder ein Teiler von $p-1$ ist. Dies können wir auf unser p anwenden und haben also, daß $\frac{10^\delta - 1}{p}$ eine ganze Zahl N ist, so daß daher:

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Denken wir uns nun sowohl $\frac{1}{p}$, als auch $\frac{10^\delta}{p}$ in einen Dezimalbruch verwandelt, so müssen in ihnen die entsprechenden Dezimalstellen übereinstimmen, da ihre Differenz eine ganze Zahl ist. Da aber $\frac{10^\delta}{p}$ aus $\frac{1}{p}$ entsteht, indem man das Komma um δ Stellen nach rechts rückt, ergibt sich, werk, das historisch um so mehr Beachtung verdient, als es in hohem Maße korrekt ist. Der Name der Tafel knüpft an das aus dem Altertum überlieferte *Sieb des Eratosthenes* an; es liegt dabei die Vorstellung zu Grunde, daß man aus der Reihe aller Zahlen successive die „aussiebt", die durch 2, 3, 5 ... teilbar sind, sodaß schließlich nur die Primzahlen übrig bleiben. Ebenso gibt nun von allen nicht durch 2, 3 oder 5 teilbaren Zahlen die Zerlegung in Primfaktoren an, und zwar bis 1020000; dabei sind alle Primzahlen durch einen horizontalen Strich gekennzeichnet, und sind damit wohl überhaupt zum ersten Male in diesen Grenzen angegeben. Man hat übrigens im 19. Jahrhundert die Berechnung der Primzahlen noch viel weiter bis in die neunte Million ausgedehnt.

Ich wende mich nun dem *fünften Punkte* zu, der *Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche*. Die eingehende Theorie finden Sie dabei Weber-Wellstein, ich will hier nur das Prinzip der Sache an einem einfachen typischen Beispiel erörtern: wir betrachten den Bruch $\frac{1}{p}$, wo p eine von 2, 5 verschiedene Primzahl ist, und werden zeigen, *daß $\frac{1}{p}$ gleich einem unendlichen periodischen Dezimalbruch wird, und daß die Ziffern-*

es doch so einfach ist.

Ich will nun in der Tat mit diesem Beweise beginnen, indem ich die Bekanntschaft mit den in den ersten beiden Punkten unserer Aufzählung enthaltenen, ganz einfachen Dingen bei Ihnen ohne weiteres voraussetze. Geschichtlich bemerke ich vorab, daß der Beweis von <u>Euklid</u> herrührt, dessen <u>Elemente</u> (griechisch <u>στοιχεῖα</u>) ja nicht nur das System der Geometrie, sondern <u>in geometrischer Sprache auch algebraische und arithmetische Dinge</u> enthalten. Der <u>Euklidische Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen verläuft</u> nun so: Sei die Folge der Primzahlen endlich, so mögen sie sämtlich 2, 3, 5 ... p sein; dann ist die Zahl $N = (1 . 2 . 3 . 5 \ldots p) + 1$ sicher weder durch 2, noch durch 3, 5 ..., noch schließlich durch p teilbar, denn stets läßt sie bei der Division den Rest 1; daher muß sie entweder selbst eine Primzahl sein, oder es gibt außer 2, 3 ... p noch andere größere Primzahlen. Beides widerspricht der Voraussetzung, womit der Beweis geführt ist.

Was nun den <u>vierten Punkt</u>, die <u>Zerlegung in Primfaktoren</u>, anlangt, so will ich Ihnen hier eine der älteren <u>Primfaktorentafeln</u> vorlegen: <u>Chernac, Cribrum arithmeticum</u>,[1] ein großes sehr verdienstvolles Tabellen-

1) Daventriae 1811.

der großen Zahl der eigentlichen zahlentheoretischen Bücher möchte ich besonders das erst vor kurzem erschienene kleine Buch von *Bachmann*, *Grundlagen der neueren Zahlentheorie* [1] nennen.

Die *spezielleren zahlentheoretischen Erörterungen* will ich an die oben aufgezählten einzelnen Punkte anschließen, und will dabei die Sache immer möglichst anschaulich gestalten; natürlich kommt dabei immer nur hervor, was *für den Lehrer wissenswert* ist, keineswegs aber in einer Form, in der er es direkt den Schülern weitergeben kann. Ich berufe mich für die Notwendigkeit solcher Ausführungen besonders auf *Examenerfahrungen*, die mir zeigen, daß sich die zahlentheoretischen Kenntnisse der Lehramtskandidaten vielfach nur auf Schlagwörter beschränken, ohne daß ein näheres Wissen damit verbunden ist. Daß π transzendent ist, kann mir jeder Kandidat sagen, was dieses Wort aber bedeutet, wissen sehr viele nicht, einmal erhielt ich sogar die Antwort, daß eine transzendente Zahl weder rational noch irrational ist! Ebenso finde ich recht häufig Kandidaten, die wohl wissen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, aber von dem Beweis keine Ahnung haben, obgleich

1) Sammlung Schubert Nr. 53. Leipzig 1907.

Sache, und die Gabe, so Abstraktes mit Vergnügen aufzufassen, ist nicht sehr häufig; die daraus schon folgende Teilnahmlosigkeit dürfte der Umstand noch vergrößern, daß die zahlentheoretischen Lehrbücher meist sich befleißigen, auch in der Darstellung so abstrakt zu sein, wie nur irgend möglich. Ich glaube, daß die Zahlentheorie viel zugänglicher werden und viel mehr allgemeines Interesse finden würde, wenn man sie in Verbindung mit anschaulichen Elementen und geeigneten Figuren vortragen wollte; wenn ihre Sätze auch logisch von diesen Hilfsmitteln unabhängig sind, so dürfte doch das Verständnis durch sie sehr erleichtert werden. Das habe ich in Vorlesungen aus den Jahren 1895/96 [1] versucht, und ähnliche Ziele verfolgt auch das neue Buch von H. Minkowski über Diophantische Approximationen. [2] Meine Vorlesung hat einen mehr elementaren einführenden Charakter, während Minkowski sehr bald speziellere Probleme in weitgehender Weise behandelt.

Was zahlentheoretische Lehrbücher anlangt, so werden Sie vielfach mit dem ausreichen, was Sie zwischendurch in den Lehrbüchern der Algebra finden. Unter

1.) Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie; (Ausg. v. A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler) Neuer Abdruck. Leipzig 1907.
2.) Mit dem Zusatz: Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907.

ständig arbeitenden Mathematiker in zwei Klassen hinsichtlich ihres Verhaltens zur Zahlentheorie teilen, die ich vielleicht als *Enthusiasten* und *Indifferente* unterscheiden kann. Für die ersten gibt es keine Wissenschaft, die so schön und wichtig wäre, keine, die so klare und präzise Beweise und Theoreme von völlig einwandfreier Strenge enthielte, als die Zahlentheorie; „wenn die Mathematik die Königin der Wissenschaften ist, so ist die Zahlentheorie die Königin der Mathematik," sagt *Gauß* einmal. Den Indifferenten andererseits liegt die Zahlentheorie ganz fern, sie kümmern sich wenig um ihre Entwicklungen und gehen ihr wohl gar aus dem Wege. Die Mehrzahl der Studierenden stimmt in ihrem Verhalten wohl mit dieser zweiten Richtung überein.

Den *Grund dieser merkwürdigen Spaltung* glaube ich in folgendem finden zu können. Einmal ist die Zahlentheorie jedenfalls *grundlegend für alle tiefer gehenden mathematischen Forschungen*; außerordentlich häufig stößt man, von ganz verschiedenen Gebieten ausgehend, zuletzt auf relativ einfache arithmetische Tatsachen. Andererseits aber ist die *reine Zahlentheorie eine äußerst abstrakte* *nung von π*. Man berechnet da nach irgend einem Verfahren die ersten Dezimalen von π, und erwähnt dabei gewiß den *modernen Transzendenzbeweis von π, der das alte Problem der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal im negativen Sinne erledigt*. Ich werde am Schluß der Vorlesung ausführlich auf diesen Beweis zurückkommen; hier formuliere ich nur die Behauptung exakt dahin, *daß die Zahl π keiner algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind*:

$$a\pi^n + b\pi^{n-1} + \ldots + k\pi + l = 0;$$

die *Ganzzahligkeit* der Koeffizienten ist besonders wesentlich, und hierdurch gehört das Problem auch der Zahlentheorie an. – Natürlich handelt es sich auch hier lediglich um eine *Aufgabe der Präzisionsmathematik*, denn nur für sie hat der zahlentheoretische Charakter von π Bedeutung; dem Approximationsmathematiker genügt die Bestimmung der ersten Dezimalen, die ihm die praktische Ausführung der Quadratur des Kreises mit jeder überhaupt möglichen Genauigkeit gestattet.

Damit wäre die Stellung der Zahlentheorie auf der Schule geschildert; fragen wir weiter, wie es im *Universitätsunterricht* und in der *wissenschaftlichen Forschung* um sie steht. Ich möchte da die selbimmer unter *alleiniger Verwendung von Lineal und Zirkel,* so geht das ganz leicht für $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Für $n = 7$ gelingt es aber nicht mehr, und daher bleibt man auf der Schule respektvoll davor stehen, ohne wohl die Unmöglichkeit immer scharf auszusprechen; ihr Grund liegt in tieferen zahlentheoretischen Ueberlegungen. Um Mißverständnisse, wie sie leider sehr häufig sind, zu vermeiden, betone ich ausdrücklich, daß es sich hier wieder nur um ein *Problem der Präzisionsmathematik* handelt, das für praktische Anwendungen ohne jede Bedeutung ist. Für diese Zwecke wird man auch selbst in Fällen, wo eine „exakte" Konstruktion möglich ist, sie kaum benutzen, sondern man kann viel zweckmäßiger auf dem Boden der Approximationsmathematik durch einfaches, geschickt angeordnetes Probieren den Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen, wobei man jede praktisch mögliche Genauigkeit bequem erreichen kann. So verfährt natürlich jeder Mechaniker, der Instrumente mit geteilten Kreisen zu bauen hat.

9.) Noch an einer Stelle wird auf der Schule die höhere Zahlentheorie hart gestreift, nämlich bei der an die *Quadratur des Kreises* anschließenden *Berech-*

beliebiger Zahlen, wenn man ihre Zerlegung in Primfaktoren kennt.

5.) Bei der Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche spielt die Zahlentheorie eine Rolle; sie zeigt warum der Dezimalbruch periodisch werden muss und wie gross seine Periode wird.

Während das alles auf Quinta und Quarta herankommt, tritt später die Zahlentheorie nur mehr sporadisch auf, und zwar kommt allenfalls folgendes in Betracht:

6.) Nicht auf jeder Schule, aber doch gelegentlich ist von Kettenbrüchen die Rede.

7.) Mitunter treten im Unterricht auch diophantische Gleichungen auf, das sind Gleichungen mit mehreren auf ganzzahlige Werte beschränkten Unbekannten. Als Beispiel hebe ich die pythagoräischen Zahlen hervor, von denen schon einmal gelegentlich gesprochen wurde (vgl. S. 80.); es handelt sich da bekanntlich um die ganzzahligen Lösungstripel der Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8.) In enger Beziehung zur Zahlentheorie steht das Problem der Kreisteilung, obwohl dieser Zusammenhang auf der Schule kaum jemals herausgearbeitet wird. Soll man den Kreis in n gleiche Teile teilen, natürlich und hier ist es eine lohnende Aufgabe der pädagogischen Kunst des Lehrers, mit den erwünschten weiteren Andeutungen nicht zurückzuhalten, ohne die Interessen der Mehrheit zu verletzen.

III. Von den besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Wir beginnen jetzt ein neues Kapitel, das der *eigentlichen Lehre von den ganzen Zahlen*, der *Zahlentheorie* oder *Arithmetik im engeren Sinne* gewidmet sein soll. Ich will zunächst tabellarisch an die einzelnen Fragen erinnern, mit denen diese Wissenschaft in den Schulunterricht eingreift:

1.) Das erste Problem der Zahlentheorie ist das der *Teilbarkeit*: Ist eine Zahl durch eine andere teilbar oder nicht?

2.) Man kann *einfache Regeln* angeben, die *über die Teilbarkeit* einer beliebigen Zahl durch kleinere Zahlen, wie 2, 3, 4, 5, 9, 11 et. c. leicht entscheiden lassen.

3) Es gibt *unendlich viele Primzahlen*, das sind Zahlen, die *keinen eigentlichen Teiler* (außer 1 und sich selbst) haben: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 . . .

4.) Man beherrscht die Teilbarkeitsverhältnisse

Nenner dazu sein müssen, ist verschieden und von dem Zwecke der Anwendung abhängig.

Alle diese interessanten Beziehungen habe ich in einer *Vorlesung im Sommersemester 1901* behandelt, die 1902 autographiert wurde und jetzt im Neudruck vorliegt: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. (Ausgearb. v. C. H. Müller).*[1]

Mit einem Worte will ich nun zum Schluß noch darauf eingehen, wie ich mir die *Behandlung dieser Dinge auf der Schule* wünsche. Eine genaue Theorie der Irrationalzahl ist dem Interesse und der Fassungskraft der meisten Schüler gewiß da kaum am Platze. Der Knabe wird sich meist mit Angaben von beschränkter Genauigkeit wohl zufrieden geben, eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ mm schon bewundernd anstaunen und nach unbeschränkter Genauigkeit gar gewiß kein Verlangen tragen; es genügt also für diesen Durchschnitt, wenn man die Irrationalzahl *an Beispielen nur im allgemeinen anschaulich* macht, und so geschieht es wohl auch meistens. Freilich werden einzelne spezifisch veranlagte Knaben wohl darüber hinaus eine nähere Einsicht verlangen,

1.) Neuer Abdruck. Leipzig 1907.

Thema zurückzukommen, die Bemerkung an, *daß die Begriffsbildung der Irrationalzahl sicherlich nur in die Präzisionsmathematik gehört*. Denn die Behauptung, daß zwei Punkte um eine irrationale Zahl von Metern von einander abstehen, kann unmöglich Sinn haben, da ja doch, wie wir sahen, alle Dezimalstellen hinter der sechsten keine reale Bedeutung mehr haben. *Für die Praxis kann man also irrationale Zahlen unbedenklich durch rationale ersetzen*. Dem scheint freilich zunächst zu widersprechen, daß man in der Krystallographie von dem Gesetze der rationalen Indices spricht, oder daß man in der Astronomie als wesentlich verschiedene Fälle unterscheidet, ob die Umlaufszeiten zweier Planeten rationales oder irrationales Verhältnis haben. In der Tat aber zeigt sich in dieser Ausdrucksweise nur wieder die Vieldeutigkeit unserer Sprache, denn man meint hier rational und irrational in einem ganz andern, als dem bisher benutzten, in einem *approximationsmathematischen Sinne*. Man sagt hier nämlich, daß zwei Größen ein rationales Verhältnis haben, wenn sie sich wie zwei *kleinere* ganze Zahlen verhalten, etwa wie $\frac{3}{7}$, während man ein Verhältnis $\frac{2021}{7053}$ schon irrational nennen würde; wie groß Zähler und griffes genau parallel.

Gemäß dieser Einteilung unserer Anschauung wird es nahe liegen, auch die Mathematik in zwei Teile zu teilen, die man als Approximations- und Präzisionsmathematik bezeichnet hat. Wollen wir diesen Unterschied an der Deutung einer Gleichung $f(x) = 0$ erläutern, so handelt es sich in der Approximationsmathematik genau wie in unserer tatsächlichen empirischen Anschauung nicht darum, daß der Wert $f(x)$ genau gleich 0 ist, sondern nur darum, daß sein Betrag $|f(x)|$ unter der erreichbaren Schwelle der Genauigkeit bleibt; die Schreibweise $f(x) = 0$ soll also nur eine Abkürzung für die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ sein, mit der man es tatsächlich zu tun hat. Erst die Präzisionsmathematik hat die Gleichung $f(x) = 0$ wirklich genau zu erfüllen. Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, könnte man, etwas kraß ausgedrückt, auch sagen, daß man nur diese Disziplin braucht, wäh- die Präzisionsmathematik nur zum Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist, und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine bequeme Stütze abgibt.

Ich schließe hier, um wieder auf unser eigentliches

Beugungen des Lichtes eintreten, aber kein optisches Bild mit genauen Reproduktionen der Einzelheiten mehr entworfen wird. Die Folge davon ist die Unmöglichkeit, auf optischem Wege feinere Längenmessungen vorzunehmen als mit einer Genauigkeit von 1 Mikron, so daß bei Längenangaben in mm stets nur die ersten 3 Dezimalen eine gesicherte Bedeutung haben können. Ebenso werden wir bei allen physikalischen Beobachtungen und Messungen stets auf solche nicht zu überschreitende Schwellenwerte stoßen, die die Grenze der möglichen Genauigkeit angeben; Angaben jenseits dieser Grenze haben keinen Sinn mehr, und sind ein Zeichen von Unwissenheit oder gar Schwindel. Solche übertrieben genaue Zahlen findet man, beiläufig gesagt, häufig in den Reklameschriften von Badeorten, wo der Salzgehalt der Quellen auf eine Anzahl von Dezimalen angegeben ist, deren genaue Wägung einfach eine Unmöglichkeit ist.

Gegenüber dieser Eigenschaft der empirischen Raumanschauung, an eine beschränkte Genauigkeit geknüpft zu sein, hat die abstrakte oder ideale Raumanschauung eine unbegrenzte Genauigkeit, und geht darin nach dem Cantorschen Axiom mit den arithmetischen Definitionen der Zahlbeauch noch 7 bedeutet, ist uns unmittelbar klar, während wir von grösseren Zahlen, etwa 2503, keine so unmittelbare Anschauung mehr haben; hier ist vielmehr statt dieser die *innere Anschauung der geordneten Zahlreihe*, die wir uns aus den ersten Zahlen durch vollständige Induktion bilden, eingetreten. In der Raumanschauung nun liegt es so: Betrachten wir z. B. den Abstand zweier Punkte, so können wir ihn nur mit einer gewissen *beschränkten Genauigkeit* abschätzen und messen, denn unser Auge kann Strecken, deren Unterschied unter einer gewissen Grenze liegt, nicht mehr als verschieden auffassen; das ist die Erscheinung der *Schwelle*, die in der ganzen Psychologie eine so grosse Rolle spielt. Das ändert sich aber auch dem Wesen nach nicht, wenn wir unser Auge durch die schärfsten Hilfsmittel unterstützen, da es physikalische Eigenschaften gibt, die einen gewissen Genauigkeitsgrad zu überschreiten nicht gestatten. Die Optik lehrt nämlich, dass die Wellenlänge des Lichtes, die ja bekanntlich mit der Farbe variiert, von der Grössenordnung $\frac{1}{1000}$ mm (= 1 Mikron) ist; sie zeigt ferner, dass Gegenstände, deren Dimensionen dagegen klein sind, auch mit den besten Mikroskopen nicht mehr deutlich gesehen werden können, weil da nur noch wiesen werden kann, nennt man ein *Axiom*. Es muß je nach der Veranlagung dem einzelnen Mathematiker entweder als *intuitiv einleuchtend* erscheinen, oder als *mehr oder minder willkürliche Verabredung* acceptiert werden. Das vorliegende Axiom über die eineindeutige Korrespondenz aller reellen Zahlen einerseits und der Punkte der Geraden andererseits wird gewöhnlich als *Cantorsches Axiom* bezeichnet, da *G. Cantor* der erste war, der es ausdrücklich formuliert hat (in den Mathem. Annal. Bd. 5 von 1872).

Es ist hier die Stelle, überhaupt von der *Natur der Raumanschauung* ein Wort zu sagen. Man belegt eigentlich *zweierlei Verschiedenes* mit dieser Bezeichnung: einmal die *sinnlich unmittelbare, die empirische Anschauung* des Raumes, die wir durch Messen kontrollieren können, dann aber die *abstrahierte innere Raumanschauung*, man kann vielleicht sagen, die uns innewohnende *Idee des Raumes*, die über die Ungenauigkeit der sinnlichen Wahrnehmung hinausgeht. Ein analoger Unterschied besteht ja überhaupt für jede Anschauung, wie ich schon bei der Begründung des Anzahlbegriffes andeutete (vgl. S. 27), und man kann ihn dort vielleicht am besten so aufweisen: Was eine kleine Zahl, wie 2 oder 5 oder in sehr vielen Lehrbüchern, besonders wiederum bei *Weber-Wellstein* und *Burkhardt* leicht zugänglich sind. Dort mögen Sie auch über die Definition der Irrationalzahl ausführlicher nachlesen, als ich hier andeuten konnte.

Ich möchte lieber wieder noch auf das zu sprechen kommen, was Sie in den Büchern meist nicht finden, auf die Frage nämlich, *wie man nach dieser Voraussetzung der arithmetischen Theorie zu den Anwendungen in den andern Gebieten übergehen kann*; insbesondere kommt hier die *analytische Geometrie* in Betracht, die der naiven Anschauung gerade umgekehrt als Quelle der Irrationalzahlen erscheint, und die es psychologisch genommen auch in der Tat ist. Betrachten wir die Abscissenachse, auf der der Nullpunkt und auch die rationalen Punkte wie oben schon festgelegt sein mögen, so lautet der *Vordersatz*, auf dem unsere Anwendung beruht: *Zu jeder rationalen oder irrationalen Zahl gibt es einen Punkt, der sie als Abscisse hat, zu jedem Punkt der Geraden gehört umgekehrt als Abscisse eine rationale oder irrationale Zahl.* Einen solchen obersten Satz, der an der Spitze einer Disziplin steht, und aus dem alles folgende rein logisch entwickelt wird, während er selbst nicht logisch be-während er keine rationale Zahl die größer als $\frac{1}{3}$ ist, jemals erreichen kann. Die entsprechende Definition in den Weierstraßschen Vorlesungen erscheint in folgender Form: 2 Zahlen heißen gleich, wenn sie sich um weniger unterscheiden, als jede noch so kleine vorgegebene Größe; man sieht leicht den Zusammenhang mit der vorigen. Besonders anschaulich wird diese letztere Definition, wenn man sich überlegt, warum 0,999... gleich 1 ist; der Unterschied ist eben sicher kleiner als 0,1, kleiner als 0,01 u. s. f., also nach der Definition strikte gleich Null.

Fragt man sich nun, warum man diese Irrationalzahlen ins System der gewöhnlichen Zahlen aufnehmen und unterschiedslos mit ihnen rechnen kann, so ist der Grund in der Gültigkeit der Monotoniegesetze der elementaren Rechnungsoperationen zu suchen. Das Prinzip ist folgendes: Hat man Irrationalzahlen zu addieren, multiplizieren et. c., so schließe man sie enger und immer enger zwischen rationale Grenzen ein und mache mit diesen Grenzen die gleichen Operationen; dann wird eben wegen der Gültigkeit der Monotoniesätze gleichzeitig auch das Resultat in immer engere Grenzen eingeschlossen.

Es ist wohl nicht nötig, daß ich auf diese Dinge hier näher eingehe, da Ihnen bequem lesbare Darstellungen zu A, jede größere zu B; dann ist einmal sicher jedes A kleiner als jedes B, und andererseits kann es weder in A eine größte, noch in B eine kleinste rationale Zahl geben, da zwischen jeder rationalen Zahl und dem unendlichen Dezimalbruch noch unendlich viele andere rationale Zahlen liegen.

Gemäß dieser Ueberlegung *definiert* nun Dedekind, was vom rein logischen Standpunkte natürlich als „*willkürliche Festsetzung*" angesehen werden muß: *Ein jeder Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen heiße eine rationale oder irrationale Zahl, je nachdem er eigentlich oder uneigentlich ist.* Daran schließt sich sofort eine *Definition der Gleichheit*: *2 Zahlen heißen gleich, wenn sie im Gebiete der rationalen Zahlen denselben Schnitt hervorbringen.* Aus dieser Definition kann man geradezu *beweisen*, daß z. B. $\frac{1}{3}$ dem unendlichen Dezimalbruch 0,333... gleich ist. Man wird, wenn man sich einmal auf unsern Boden stellt in der Tat einen Beweis, d. h. eine Zurückführung auf die angegebene Definition verlangen müssen, obwohl das dem naiv an die Sache Herantretenden natürlich ganz unnötig scheint. Dieser Beweis ergibt sich übrigens leicht, indem man sich überlegt, daß jede rationale Zahl unterhalb $\frac{1}{3}$ von dem unendlichen Dezimalbruch schließlich überschritten wird, Zahlenreihe ohne weiteres aufzwingt, ausschließen. Um von hier aus zu einer rein arithmetischen Definition der Irrationalzahl zu gelangen, bildet sich Dedekind den Begriff des Schnittes im Gebiete der rationalen Zahlen. Ist nämlich r irgend eine rationale Zahl, so teilt sie die Gesamtheit aller rationalen Zahlen in 2 Teile A, B derart, daß jede Zahl aus A kleiner als jede aus B ist, und daß eine jede rationale Zahl zu einer von beiden Klassen gehört: A ist die Gesamtheit aller rationalen Zahlen kleiner als r, B die aller größeren, wobei man r selbst ebensowohl zu A, als zu B rechnen kann; es bleibt gleichgültig, welche dieser beiden Möglichkeiten man wählt. Neben diesen „eigentlichen Schnitten" gibt es nun noch „uneigentliche Schnitte", das sind Verteilungen aller rationalen Zahlen auf 2 Klassen derselben Eigenschaften, die nur nicht durch eine rationale Zahl hervorgerufen werden, d. h. bei der weder in A eine größte noch in B eine kleinste Zahl enthalten ist. Ein Beispiel solcher uneigentlichen Schnitte liefert uns z. B. $\sqrt{2} = 1,414 \ldots$ oder überhaupt jeder unendliche aperiodische Dezimalbruch: wir können nämlich von jeder rationalen Zahl sofort entscheiden, ob sie kleiner oder größer als der betr. unendliche Dezimalbruch ist, und rechnen nun jede kleinere Zahl stimmten Gesetz fortschreiten, und jeder Mensch wird ihn unwillkürlich als bestimmte und dann natürlich nicht rationale Zahl betrachten. Damit ist aber der Allgemeinbegriff der Irrationalzahl bereits gegeben, auf den also die Betrachtung der Dezimalbrüche gewissermaßen von selbst führt. Historisch ging es demgemäß auch hier in der Tat so, wie wir es früher bei den negativen Zahlen ausführlich geschildert haben: Der Kalkül zwang zur Einführung der neuen Begriffe, und ohne daß man viel über deren Wesen und Begründung nachdachte, operierte man eben mit ihnen, zumal sie sich vielfach als äußerst nützlich erwiesen.

Erst in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts brach sich das Bedürfnis nach präziser arithmetischer Formulierung der Grundlagen der Irrationalzahlen Bahn, und es waren die Vorlesungen von Weierstraß aus jenen Jahren, in denen das zuerst geschah. Eine allgemeine Grundlegung gab 1872 G. Cantor in Halle, der Begründer der Mengenlehre, und gleichzeitig unabhängig R. Dedekind in Braunschweig. Den Dedekindschen Standpunkt will ich hier in ein paar Worten erläutern. Wir denken uns im Besitze des Inbegriffs der rationalen Zahlen, wollen aber jede Raumanschauung, die uns den Begriff der Kontinuität der

Eine Bemerkung über das *Wort „irrational"* sei dann noch angefügt. Es beruht wahrscheinlich auf einer *irrtümlichen Uebersetzung des griechischen „ἄλογος"* ins Lateinische: Dies griechische Wort sollte wahrscheinlich „*nicht aussprechbar*" bedeuten und besagen, daß die neuen Zahlen bezw. Streckenverhältnisse nicht wie die rationalen durch ein *Verhältnis zweier ganzen Zahlen* angegeben werden können; erst das Mißverständnis des Uebersetzers hat daraus das „unvernünftig" gemacht, das dem Namen der Irrationalzahl jetzt anzuhaften scheint.

Die allgemeine Idee der Irrationalzahl ist wohl erst am Ende des 16. Jahrhunderts im Gefolge der Einführung der Dezimalbrüche aufgetreten, deren Gebrauch sich damals in Verbindung mit dem Entstehen der Logarithmentafeln einbürgerte. Verwandelt man eine rationale Zahl in einen Dezimalbruch, so kann man neben endlichen auch *unendliche Dezimalbrüche* erhalten, die jedoch unter allen Umständen *periodisch* werden; das einfachste Beispiel dafür ist $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, d. i. ein Dezimalbruch, dessen einziffrige Periode 3 sogleich hinter dem Komma beginnt. Nun hindert nichts, sich einen *aperiodischen Dezimalbruch* zu denken, *dessen Ziffern nach sonst irgend einem be-*

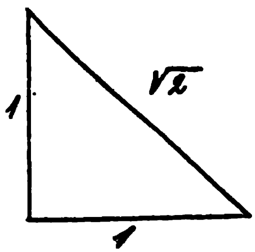
man durch wiederholtes Quadratwurzelziehen gewinnt, und demgemäß geometrisch mit Lineal und Zirkel konstruieren kann; die allgemeine Idee der Irrationalzahl besaßen sie aber wohl noch nicht.

Ich muß diese Bemerkung jedoch noch etwas näher präzisieren, um Mißverständnisse zu vermeiden. Sie soll nur besagen, daß die Griechen kein Verfahren besaßen, das arithmetisch die allgemeine irrationale Zahl aus den rationalen herzustellen, zu definieren gestattete, wie wir es sogleich kennen lernen werden. *Trotzdem aber war ihnen von einer anderen Seite her der Begriff der allgemeinen reellen nicht notwendig rationalen Zahl geläufig*, nur hat die Sache ein ganz anderes Aussehen, als bei uns, da sie Buchstaben für allgemeine Zahlen nicht benutzten. Sie betrachteten nämlich — Euklid stellt das ja systematisch so dar — *Verhältnisse zweier beliebiger Strecken*, und operierten mit ihnen eigentlich genau so, wie wir heute mit der beliebigen reellen Zahl umgehen; es finden sich da sogar Definitionen bei Euklid, die ganz an die moderne Theorie der Irrationalzahl anklingen. Übrigens ist im Namen noch immer ein Unterschied gegen die ganze natürliche Zahl, diese heißt *ἀριθμός*, während das Streckenverhältnis, die beliebige reelle Zahl *λόγος* genannt wird.

abgetragen einen nichtrationalen, in jener überall dichten Bedeckung noch nicht enthaltenen Punkt liefert. In der Mehrzahl der Fälle wird ebenso die Hypotenuse $\sqrt{m^2+n^2}$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den ganzzahligen Katheten m, n irrational sein; die Schule des Pythagoras beschäftigte sich mit Vorliebe gerade mit der Aufsuchung aller jener Wertepaare m, n, für die sich rechtwinklige Dreiecke mit drei rationalen Seiten ergeben, das sind die sogenannten *pythagoräischen Zahlen*, deren einfachstes Beispiel 3, 4, 5 ist und auf die wir noch zurückkommen werden. Jedenfalls aber war bekannt, daß im allgemeinen bei dieser Konstruktion irrationale Strecken auftreten, und diese außerordentlich wesentliche Erkenntnis war wohl das Opfer von 100 Ochsen ~~wohl~~ wert, durch das sie Pythagoras gefeiert haben soll, und über das so gern schlechte Witze gemacht werden. — Die späteren griechischen Mathematiker studierten nun immer kompliziertere Irrationalitäten, so finden sich bei Euklid Typen wie $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ u. dergl. Allgemein kann man aber sagen, *daß sie sich im wesentlichen auf solche Irrationalitäten beschränkten, die* dehnung des Zahlbereiches auf

3. <u>die irrationalen Zahlen</u>

über. Wir wollen uns da nicht erst mit der Frage aufhalten, wie die Schule sie gewöhnlich ableitet, da man hier über einige Beispiele meist nicht weit hinauskommt; wir gehen besser gleich auf die <u>geschichtliche Entwicklung</u> ein. <u>Historisch liegt der Ursprung des Begriffes der irrationalen Zahlen jedenfalls in der geometrischen Anschauung und dem geometrischen Bedürfnis.</u> Denken wir uns die Abscissenachse, wie soeben erörtert, überall dicht mit der Menge der rationalen Zahlen besetzt; <u>dann gibt es noch weitere Zahlen</u>, wie das zuerst <u>Pythagoras</u> in etwa folgender Weise gezeigt haben soll: Hat man ein rechtwinkliges Dreieck mit



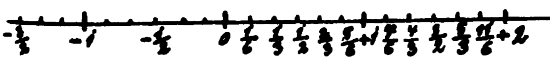
zwei Katheten der Länge 1, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$, und das ist gewiß keine rationale Zahl; denn setzt man $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wo a und b teilerfremd gemacht sein mögen, so kommt man leicht mit bekannten Gesetzen der Teilbarkeit ganzer Zahlen in Widerspruch. <u>Hier ist also eine Strecke geometrisch konstruiert, die auf der Abscissenachse von 0 an</u>

„*überall dicht*" *liegt*, und meint dabei: *daß in jedem noch so kleinen Intervalle noch unendlich viele rationale Punkte liegen*. Schärfer kann man, um nichts dem Inbegriff der rationalen Punkte Fremdes hineinzubringen, diese Definition dahin fassen, *daß zwischen je zwei rationalen Punkten noch stets ein weiterer rationaler Punkt liegt*. Eine Folge davon ist, daß man aus der Gesamtheit der rationalen Punkte durchaus im Endlichen gelegene Teile ausscheiden kann, die weder ein kleinstes, noch ein größtes Element enthalten; ein Beispiel bildet die Gesamtheit aller rationalen Punkte zwischen 0 und 1, diese Punkte selbst nicht mit einbegriffen; denn in ihr gibt es zu jeder rationalen Zahl noch eine zwischen dieser und 0 gelegene, also *kleinere*, und ebenso eine zwischen ihr und 1 gelegene, also *größere* Zahl. Diese Begriffsbildungen gehören in ihrer systematischen Ausbildung bereits der *Cantorschen Mengenlehre* an; wir werden in der Tat später den Inbegriff der rationalen Zahlen mit den hier erwähnten Eigenschaften als wichtiges *Beispiel einer Menge* verwenden.

Ich gehe nunmehr zu der weiteren Aus-

Grössen auch wirklich anwenden? Man könnte das wieder eine Frage der „angewandten Mathematik" nennen, die eine durchaus selbständige Behandlung zulässt, wobei freilich recht fraglich ist, ob diese Trennung auch *paedagogisch* zweckmässig ist. Bei Weber-Wellstein kommt diese Spaltung der Probleme in zwei Teile übrigens sehr charakteristisch zum Ausdruck: nach der abstrakten Einführung der Bruchrechnung, auf die wir bisher allein Bezug nahmen, widmet er einen eigenen (den fünften) Abschnitt, „Verhältnisse" betitelt, der Frage, *wie man die rationalen Zahlen auf die Aussenwelt wirklich anwendet*; dabei ist seine Darstellung freilich auch mehr begrifflich als anschaulich.

Ich schliesse nun diese Erörterungen über Brüche mit noch einer *allgemeinen Bemerkung über die Gesamtheit der rationalen Zahlen*, wobei ich mich der Anschaulichkeit halber der Darstellung auf der geraden Linie bediene. Auf dieser



denken wir uns alle Punkte mit rationalen Abszissen markiert, die wir kurz als *rationale Punkte* bezeichnen wollen. Man sagt dann, *dass die Gesamtheit dieser rationalen Punkte auf der Abszissenachse* hinzutretende Anschauung der meßbaren Größen, die ein unmittelbar intuitives Bild der Brüche liefert. Wir erfassen diesen Unterschied am besten, wenn wir uns ein Wesen vorstellen, das nur die Idee der ganzen Zahlen, aber keine Anschauung von meßbaren Größen besitzt: Die Schuldarstellung müßte ihm dann vollkommen unverständlich bleiben, während es die Darlegungen von Weber-Wellstein oder Burkhardt wohl begreifen könnte.

Welche der beiden Auffassungen ist nun die bessere, und was leisten beide? Die Antwort hierauf wird ähnlich lauten, wie neulich, als wir die analoge Frage für die verschiedenen Auffassungen der ganzen Zahlen selbst stellten: Sicher ist die moderne Darstellung reinlicher, aber andererseits ist sie auch ärmer. Denn von dem, was die Schuldarstellung einheitlich gibt, liefert sie eigentlich nur die eine Hälfte: Die abstrakte arithmetische, in sich logisch vollständige Einführung der Brüche und des Rechnens mit ihnen. Nach Erledigung dieser verbleibt aber noch eine zweite unabhängige und nicht minder wichtige Frage: Kann man die so abgeleitete theoretische Doktrin auf die uns vorkommenden anschaulichen meßbaren man erkennt leicht, daß die so entstehende Operation nichts als Multiplikation mit $a \cdot c$ und Division mit $b \cdot d$ bedeutet, so daß man damit die Regel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ der Bruchmultiplikation aus einer klaren Bedeutung der Brüche gewonnen, nicht aber durch bloße willkürliche Verabredung festgesetzt hat. Ebenso kann man natürlich die Division deuten und behandeln. Addition und Subtraktion hingegen lassen aus diesen Vorstellungen keine so einfache Deutung zu; die Formel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ bleibt also auch bei Burkhardt eine Verabredung, für die er nur Plausibilitätsgründe heranbringt.

Vergleichen wir nun die alte Schuldarstellung mit der so geschilderten modernen Auffassung. Bei dieser bleiben wir – sowohl in der einen, wie der anderen Ausführung – trotz der Erweiterung des Zahlbegriffes eigentlich ganz auf dem Boden der ganzen Zahlen stehen; nur deren Regeln werden als bekannt oder ihr Inbegriff als anschaulich erfaßt vorausgesetzt, und die neuen als Zahlenpaare bezw. Operationen mit ganzen Zahlen definierten Dinge fügen sich ganz diesem Rahmen ein. Die Schuldarstellung aber beruft sich durchaus auf die neu

Erweitern bezw. Kürzen der Brüche ist, hier in der Gestalt einer Definition der Gleichheit: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ heißen gleich, wenn $ad = bc$. Ähnlich wird das Größer und Kleiner definiert, ähnlich wird festgesetzt, daß als Summe zweier Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ bezeichnet werden möge, u. s. f. Dann wird bewiesen, daß die so definierten Operationen in dem neu entstandenen Zahlkreise formal genau die Eigenschaften der Addition und Multiplikation für ganze Zahlen besitzen, d. h. den mehrfach aufgezählten 11 Fundamentalgesetzen genügen.

Nicht ganz so formal, wie diese natürlich nur in den wesentlichsten Grundzügen referierte Darstellung von Weber-Wellstein geht Burkhardt vor. Er faßt den Bruch $\frac{a}{b}$ als Aufeinanderfolge zweier Operationen im Gebiete der ganzen Zahlen auf: Einer Multiplikation mit a und einer Division mit b, wobei ihm eine willkürlich angenommene ganze Zahl das Objekt darstellt, auf das diese Operationen anzuwenden sind. Nimmt man zwei solche „Operationspaare" $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ nacheinander vor, so soll das der Multiplikation der Brüche entsprechen, und bildungen der Bruchrechnung kombinieren sich nun noch mit der Einführung der negativen Zahlen, so daß man schließlich über den Inbegriff aller „rationalen Zahlen" verfügt. Ich kann auf die Details dieses ganzen Aufbaues, der auf der Schule natürlich eine lange Zeit in Anspruch nimmt, hier nicht eingehen. Wir wollen ihn lieber gleich mit der in der modernen Mathematik ausgebildeten Darstellung vergleichen, und als Beispiele für diese die zitierten Bücher von Weber-Wellstein[1] und Burkhardt[2] heranziehen.

Bei Weber-Wellstein treten die formalen Gesichtspunkte, die aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Deutungen das notwendig Gemeinsame herauspräparieren, vorwiegend in Erscheinung. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist ein Symbol, ein „Zahlenpaar", mit dem nach gewissen bestimmten Regeln gerechnet werden soll; diese Regeln, die auf dem vorhin auseinandergesetzten Wege naturgemäß aus der Bedeutung der Brüche entstanden, haben hier den Charakter willkürlicher Verabredungen. So erscheint z. B. das, was für den Schüler ein anschaulicher Satz über das

1.) zitiert S. 8. 2.) zitiert S. 57.

Maß; von der Betrachtung zählbarer Dinge zu der
meßbarer Dinge übergegangen. Mit einer gewis-
sen Einschränkung gibt das System der Münzen
oder das der Gewichte, vollkommen das System al-
ler Längen ein Beispiel meßbarer Mannigfaltig-
keiten, und an ihnen wird auch einem jeden
Schüler der Begriff des Bruches beigebracht,
denn was $\frac{1}{3}$ Meter oder $\frac{1}{2}$ Pfund ist, das ist je-
dem Menschen sehr leicht klar zu machen. Die
Beziehungen $=, >, <$ zwischen Brüchen lassen
sich nun aus der gleichen konkreten Anschauung
heraus sofort entwickeln, in gleicher Weise die
Addition und Subtraktion. Die Multiplika-
tion läßt sich alsdann durch eine leichte
Modifikation ihrer ursprünglichen Bedeutung
verständlich machen: Eine Zahl mit $\frac{a}{b}$ multi-
plizieren heißt sie mit der ganzen Zahl a (nach
der alten Definition) multiplizieren und als-
dann mit b dividieren, oder auch: das Pro-
dukt entsteht aus dem Multiplikanden gerade
so, wie $\frac{a}{b}$ aus 1. Die Division durch einen Bruch
wird dann als inverse Operation der Multi-
plikation definiert: $a : \frac{2}{3}$ ist die Zahl, die
mit $\frac{2}{3}$ multipliziert a ergibt. Diese Begriffs-

zahlreichen Fallunterscheidungen bei allen Regeln zwingen würden. Freilich darf man das keineswegs überstürzen, sondern muss dem Schüler zu der Revolution des inneren Denkens, die sich durch diese Erkenntnis in ihm vollzieht, Zeit lassen. Und während es leicht verständlich ist, dass andere Festsetzungen unzweckmässig sind, sollte man doch das so sehr Wunderbare der Tatsache, dass es eine allgemein zweckmässige Festsetzung wirklich gibt, für den Schüler klar verständlich hervorheben; ihm sollte deutlich werden, dass die Existenz einer solchen keineswegs von vornherein zu erwarten ist.

Ich schliesse damit meine Darlegungen über die Theorie der negativen Zahlen ab und lade Sie nunmehr, meine Herren, zu ähnlichen Betrachtungen über

2. die gebrochenen Zahlen

ein. Gehen wir von der Behandlung der Brüche auf der Schule aus. Hier hat der Bruch $\frac{a}{b}$ von Anfang an eine durchaus konkrete Bedeutung, nur dass gegenüber dem anschaulichen Bilde der ganzen Zahl ein Wechsel des Substrates eingetreten ist: Man ist nämlich von der Anzahl zum nur an die Ungleichungen $a > b$, $c > d$ geknüpft ist.[1] Es wird denn der Beweis geradezu erschlichen, und das psychologische Moment, das nur vermöge des Permanenzprinzipes zum Ansatz hinleitet, mit einem logischen beweisenden Moment verwechselt. Natürlich kann der Schüler, dem das so zum ersten Male dargeboten wird, es nicht ganz begreifen, aber glauben muß er es schließlich doch; und wenn, wie es häufig wohl vorkommt, die Wiederholung auf der höheren Stufe nicht die nötige genauere Ergänzung gibt, dann mag sich wohl bei manchem die Ueberzeugung festsetzen, daß die Sache etwas Mystisches, Unbegreifliches sei.

Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, keinerlei Versuche zum Erschleichen unmöglicher Beweise zu machen; man sollte vielmehr den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend den Schüler an einfachen Beispielen überzeugen oder womöglich es ihn selbst finden lassen, daß gerade diese auf dem Permanenzprinzip beruhenden Festsetzungen geeignet sind, einen gleichförmig bequemen Algorithmus zu liefern, während andere immer zu

1) Vgl. z. B.: E. Heis, Samml. von Beispielen und Aufgaben a. d. Arithmetik u. Algebra. 106.–108. Aufl. Köln 1904 pag. 46.

lierend einwirken, und *nie das allein leitende Prinzip* abgeben, denn der einzigen von ihr gestellten Anforderung der Widerspruchsfreiheit genügen natürlich stets noch eine große Menge von Begriffsystemen.

Wollen Sie nun noch *Literatur* über Fragen der Geschichte der negativen Zahlen finden, so empfehle ich *Tropfke Geschichte der Elementarmathematik* [1.)] als eine ausgezeichnete Materialsammlung, die sehr viele Einzelheiten über die Entwicklung der elementaren Begriffe, Anschauungen und Benennungen in übersichtlicher Darstellung enthält.

Ueberlegen wir nun noch kritisch, wie man die *negativen Zahlen auf der Schule* tatsächlich darzustellen pflegt, so ist zunächst zu sagen, daß da *häufig Fehler* vorkommen, indem man entsprechend jenen vorhin schon gekennzeichneten Bestrebungen der älteren Mathematiker immer wieder die logische Notwendigkeit der Zeichenregeln zu *beweisen* versucht. Besonders gern gibt man die oben angegebene heuristische Herleitung des $(-b)(-d) = +b\cdot d$ aus der Formel für $(a-b)(c-d)$ als Beweis aus, indem man tatsächlich völlig außer Acht läßt, daß diese Formel zunächst

---

1.) 2 Bände. Leipzig 1902/1903.

Ansatzes, oder von Beweisbarkeit der Zeichenregel nicht die Rede sein kann; es kann sich vielmehr nur darum handeln, die logische Zulässigkeit des Ansatzes zu erkennen, während er im Uebrigen willkürlich ist, und durch *Zweckmäßigkeitsgründe*, wie jenes *Permanenzprinzip*, reguliert wird.

Es ist bei dieser Betrachtung der auch sonst oft sich darbietende Gedanke nicht zu unterdrücken, *daß die Dinge manchmal vernünftiger zu sein scheinen, als die Menschen*. Ueberlegen Sie nur, wie hier einer der größten Fortschritte in der Mathematik, die Einführung der negativen Zahlen und das Operieren mit ihnen, nicht durch bewußtes logisches Ueberlegen eines Einzelnen geschaffen worden ist, sondern wie er durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst langsam organisch herausgewachsen ist, wobei es fast aussieht, als ob die Menschen von den Buchstaben gelernt haben. Die vernünftige Ueberlegung, daß man da wirklich etwas Richtiges, mit der strengen Logik Verträgliches gemacht hat, tritt erst viel später ein. Ueberhaupt kann die reine Logik bei solchen neuen Begriffsbildungen immer nur *regu-*

legung folgend, als *nahezu notwendige Annahme* bezeichnen müssen, *notwendig, insofern man für die neuen Dinge die Gültigkeit der alten Regeln haben will.* Freilich war den alten Mathematikern bei diesen Begriffsbildungen äußerst schlecht zu Mute, und ihr schlechtes Gewissen über die Annahmen, die sie da machten, trat in Namen wie *erdachte Zahlen, falsche Zahlen* et. c. zu Tage, die sich für die negativen Zahlen gelegentlich finden. Aber trotz aller Bedenken finden die negativen Zahlen im 16. und 17. Jahrhundert wegen ihrer sich immer klarer zeigenden Anwendbarkeit mehr und mehr allgemeine Anerkennung; sehr viel dazu beigetragen hat ohne Zweifel die Entwicklung der analytischen Geometrie. Freilich, die Bedenken blieben bestehen und mußten bestehen bleiben, so lange man im Grunde doch immer wieder nach einer Deutung als Anzahlen suchte, und die Möglichkeit der Voranstellung der formalen Gesetze nicht kannte; im Zusammenhange damit standen die sich immer wiederholenden Versuche, die Vorzeichenregeln zu beweisen. Die einfache Aufklärung, die erst das 19. Jahrhundert brachte, ist die, *daß von logischer Notwendigkeit dieser*

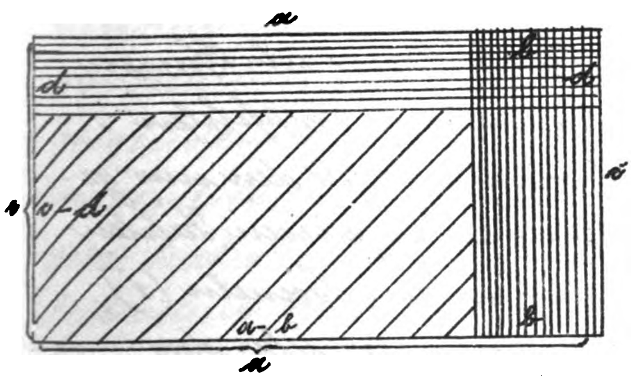
Nun tritt für die Weiterentwicklung eine allgemeine Eigentümlichkeit der menschlichen Natur in Kraft, daß wir nämlich unwillkürlich geneigt sind, nach für specielle Fälle abgeleiteten und gültigen Regeln auch unter anderen allgemeineren Umständen zu verfahren. Als „Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze" ist dies für die Arithmetik zuerst von Hermann Hankel in seiner Theorie der komplexen Zahlsysteme [1] als leitender Gesichtspunkt klar in Anspruch genommen worden; dieses äußerst interessante Buch kann ich Ihnen nur dringend zur Kenntnisnahme empfehlen. Dieses allgemeine Prinzip würde also für den uns gerade interessierenden Uebergang zu negativen Zahlen aussagen, daß man wünscht in den Formeln (1), (2) die ausdrücklichen Voraussetzungen über das Größenverhältnis der a, b vergessen zu dürfen, und sie auch auf andere Fälle anzuwenden. Wendet man so (2) z. B. auf a = c = 0 an, wofür ja die Formel keineswegs bewiesen ist, so hat man $(-b).(-d) = +bd$, d. i. die Zeichenregel der Multiplikation negativer Zahlen. In dieser Weise kann man in der Tat fast unbewußt auf alle diese Regeln, die wir jetzt, der gleichen Ueber-

[1] Leipzig 1867.

a – b hat, so lehrt ein Blick auf die obige Figur: Zieht man von c die Strecke a – b ab, so erhält man dasselbe, als wenn man erst die ganze Strecke a abzieht, und dann den Teil b wieder hinzufügt, d. h.

(1.) $\underline{c - (a - b) = c - a + b.}$

2.) Es sei $a > b$ und $c > d$; dann sind auch a – b und c – d positive ganze Zahlen. Wir wollen das Produkt $(a - b) . (c - d)$ untersuchen; dazu zeichnen wir uns das Rechteck mit den Seiten



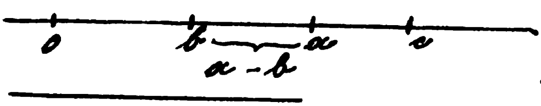
a – b und c – d, dessen Inhalt die gesuchte Zahl $(a - b) . (c - d)$ ist, als Teil des Rechtecks mit den Seiten a und c. Um aus diesem jenes erste zu erhalten, nehmen wir zunächst das obere horizontal schraffierte Rechteck $a . d$, sodann das rechts gelegene vertikal schraffierte $b . c$ fort, haben dabei aber das kleine kreuzweis schraffierte Rechteck $b . d$ einmal zu viel weggenommen, so daß wir es nachträglich noch hinzufügen müssen. Darin ist aber bereits die bekannte Formel ausgesprochen:

(2) $\underline{(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.}$

mählich in Gebrauch, als man gerade den Übergang zur Buchstabenrechnung vollzogen hatte. Ich will hierbei nicht unerwähnt lassen, daß die Vollendung der Buchstabenrechnung zuerst erreicht worden sein soll von Vieta in seiner Schrift „in artem analyticam isagoge". 1)

Man besitzt auf diesem Standpunkte die sog. Klammerregeln für die Rechnung mit positiven Zahlen, die natürlich in unseren früher aufgezählten Grundformeln enthalten sind, wenn man noch die entsprechenden Gesetze für die Subtraktion hinzunimmt; ich gehe aber gern wenigstens an 2 Beispielen noch etwas näher auf sie ein, um vor allem die Möglichkeit äußerst einfacher anschauungsmäßiger Beweise für sie darzutun, – Beweise, die eigentlich nur aus der Figur und aus dem Wörtchen „Siehe!" zu bestehen brauchten, wie das bei den alten Indern Sitte war:

1.) Es sei $a > b$ und $c > a$. Dann ist $a - b$ eine positive Zahl und kleiner als c, also muß $c - (a - b)$ als positive Zahl existieren. Deuten wir die Zahl auf der Abscissenachse, und bemerken, daß die



Strecke zwischen den Punkten b und a die Länge

1) Tours 1591.

eine mit einer Umlegung um den Nullpunkt verbundene Dehnung.

Ich möchte jetzt erörtern, *wie alle diese Dinge denn eigentlich historisch entstanden sind*. Man darf nicht etwa denken, daß die negativen Zahlen die ausschließliche Erfindung eines klugen Mannes sind, der zugleich mit ihnen womöglich auch ihre Widerspruchslosigkeit an der Hand der geometrischen Deutung herausgearbeitet hat; vielmehr hat sich in einer langdauernden Entwickelung die Benutzung der negativen Zahlen den Mathematikern gleichsam von selbst aufgedrängt, und erst als man schon lange mit ihnen operierte, im 19. Jahrhundert, traten jene Betrachtungen über ihre Widerspruchslosigkeit hinzu.

Lassen Sie mich der Geschichte der negativen Zahlen die Bemerkung vorausschicken, daß die alten *Griechen* sicher keine negativen Zahlen besaßen, so daß man ihnen hier einmal gewiß nicht die erste Stelle einräumen kann, wie das viele Leute sonst so gern tun. Hingegen muß man wohl die *Inder* als die ersten Erfinder ansprechen, die ja auch die Null und unser Ziffernsystem geschaffen haben. In Europa kamen die negativen Zahlen zur Zeit der Renaissance alllosigkeit auf rein logischem Wege hier natürlich bisher noch viel weniger geführt werden konnte, als bei den ganzen Zahlen. Nur eine Zurückführung in dem Sinne ist gelungen, daß die vorliegenden Gesetze sicher dann widerspruchslos sind, wenn die Gesetze für die ganzen Zahlen keinen Widerspruch enthalten. Bis das aber durch Führung eines logischen Widerspruchslosigkeitsbeweises für die ganzen Zahlen vervollständigt worden ist, wird man die Widerspruchslosigkeit unserer Gesetze allein darin begründet finden können, daß es anschauliche Dinge mit anschaulichen Verknüpfungen gibt, die jene Gesetze erfüllen. Wir nannten als solche oben schon die Reihe der ganzzahligen Punkte der Abscissenachse und haben nur nachzutragen, was die Rechenoperationen dort bedeuten: Die Addition $x' = x + a$ ordnet jedem Punkte x bei festem a einen andern Punkt x' so zu, daß die unendliche Gerade einfach um ein Stück a in sich verschoben wird und zwar nach rechts oder links, je nachdem a positiv oder negativ ist. Ebenso stellt die Multiplikation $x' = a \cdot x$ eine Ähnlichkeitstransformation der Geraden in sich dar, und zwar für $a > 0$ eine reine Dehnung, für $a < 0$

innere Wesen dieser Regel müssen wir sogleich noch zurückkommen; wir wollen sie hier nur in den einen Satz zusammenfassen, der das Produkt einer Reihe positiver und negativer Zahlen definiert: *Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkte der absolut genommenen Faktoren; sein Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl von Faktoren negativ ist*. Nach dieser Festsetzung hat die Multiplikation im Gebiete der positiven und negativen Zahlen wiederum die folgenden Eigenschaften:

1.) *Ausnahmslose Durchführbarkeit.*

2.) *Eindeutigkeit.*

3.) *Associativität.*

4.) *Kommutativität.*

5.) *Distributivität in Bezug auf die Addition.*

Nur beim *Gesetz der Monotonie* findet sich jetzt eine Abweichung; an seine Stelle tritt folgendes Gesetz:

6.) *Ist $a > b$, so wird $a \cdot c \gtrless b \cdot c$, je nachdem $c \gtrless 0$.*

Fragen wir uns nun, ob diese Gesetze, wiederum rein formal betrachtet, *widerspruchslos* sind. Wir müssen zuerst sagen, daß ein Beweis der Widerspruchs-

Simon macht hierzu die amüsante Bemerkung, daß gerade durch die Einführung der negativen Zahlen, die doch zum Zwecke der ausnahmslosen Durchführbarkeit der Subtraktion geschieht, die Subtraktion als selbständige Operation zu existieren aufhört. Für diese neue die Subtraktion mit umfassende Operation der Addition im Gebiete der positiven und negativen Zahlen gelten nun unverändert die alten 5 formalen Gesetze, die ich in Stichwörtern kurz wieder zusammenstelle (vgl. S. 21):

1.) Ausnahmslose Durchführbarkeit.
2.) Eindeutigkeit.
3.) Associativität.
4.) Kommutativität.
5.) Monotonie.

Dabei ist zu 5.) zu bemerken, daß $a < b$ jetzt, kurz gesagt, bedeutet, daß bei der geometrischen Darstellung a links von b liegt, so daß also z. B. $-2 < -1$, $-3 < +2$ ist.

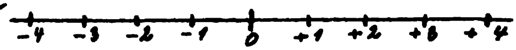
Bei der Multiplikation nun ist der Hauptpunkt die sog. Vorzeichenregel, daß $a \cdot (-c) = (-c) \cdot a = -(a \cdot c)$, und $(-c)(-c') = +(c \cdot c')$ ist; besonders die letzte: „Minus mal minus gibt plus" bildet häufig einen gefährlichen Stein des Anstoßes. Auf das

Schule mit dieser Einführung der negativen Zahlen getan wird. War der Schüler vorher stets gewöhnt, sich unter den Zahlen und weiterhin auch unter den Buchstaben, mit denen er operierte, konkrete Anzahlen vorzustellen, und beim Addieren etc. die real mit Anzahlen möglichen entsprechenden Operationen vor Auge zu haben, so wird das jetzt ganz anders: Er bekommt es mit etwas neuem, den „negativen Zahlen," zu tun, die mit dem anschaulichen Bilde der Anzahl nichts mehr zu schaffen haben, und soll doch ganz ähnlich wie mit Anzahlen mit ihnen operieren, obwohl die Operationen noch viel weniger die alte anschaulich klare Bedeutung haben. Man hat eben hier zum ersten Male den *Uebergang von der sachlichen Mathematik zur formalen* vollzogen, zu dessen vollständiger Erfassung ein hoher Grad von Abstraktionsfähigkeit gehört.

Sehen wir nun im einzelnen zu, was aus den *Rechenoperationen* nach Einführung der negativen Zahlen wird. Zunächst ist klar, daß *Addition und Subtraktion wesentlich verschmelzen*: Die Addition einer positiven Zahl ist die Subtraktion der entgegengesetzt gleichen negativen. Man

Zur Entstehung der negativen Zahlen gibt nun bekanntlich die Forderung Anlaß, die Subtraktion zu einer in allen Fällen ausführbaren Operation zu machen. Ist $a < b$, so ist $a - b$ im Gebiete der natürlichen ganzen Zahlen ein Nonsens; wohl aber existiert eine Zahl $c = b - a$, und man setzt nun

$$a - b = -c,$$

und bezeichnet es als negative Zahl. Damit verknüpft sich von Anfang an die Deutung aller ganzen Zahlen durch die Skala 

der äquidistanten Punkte einer vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten ausgedehnten Geraden, der „Abszissenachse". Dieses Bild kann man wohl heute als Gemeingut aller Gebildeten betrachten, und man darf wohl annehmen, daß es diese Verbreitung hauptsächlich der allbekannten Thermometerskala dankt. Ein anschauliches und vielbenutztes Bild der negativen Zahlen bildet auch die kaufmännische Bilanz mit ihrem Rechnen mit Besitz und Schulden.

Wir wollen uns hierbei aber doch sogleich recht ausdrücklich vergegenwärtigen, was für ein prinzipiell außerordentlich schwieriger Schritt auf der

1. den negativen Zahlen

beginnen. Eine auf die Terminologie bezügliche Bemerkung sei zunächst, dass man auf der Schule positive und negative Zahlen als „relative Zahlen" im Gegensatz zu den „absoluten" (positiven) zusammenfasst, während auf der Universität dieser Sprachgebrauch nicht üblich ist. Übrigens sagt man auf der Schule neben relativen Zahlen auch „algebraische Zahlen"[1], eine Bezeichnung, die wir hier bekanntlich in ganz anderem Sinne verwenden.

Was nun die Entstehung und Einführung der negativen Zahlen anlangt, so kann ich mich bei der Anführung von Tatsachenmaterial kurz fassen, diese Dinge sind Ihnen doch wohl geläufig, oder Sie werden sich zum mindesten an der Hand meiner Andeutungen leicht näher über sie orientieren können. Ausführlichere Darstellungen finden Sie beispielsweise ausser im Weber-Wellstein auch in recht angenehmer Form in H. Burkhardts algebraischer Analysis;[2] dieses Buch ist übrigens wegen seines mässigen Umfanges auch zur Anschaffung geeignet.

1.) Vgl. für diesen Sprachgebrauch etwa Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik (19. Aufl. – Berlin 1895) pg. 77.
2.) Leipzig 1903.

Fall ist. Vor allem sollte sie natürlich jeder Lehrer der Mathematik genau kennen, und es müßte sich gewiß auch ermöglichen lassen, daß jedem Primaner unserer höheren Lehranstalten einmal eine solche Rechenmaschine vorgeführt wird!

II. Die ersten Erweiterungen des Zahlbegriffes.

Wir wollen damit überhaupt die ganzen Zahlen verlassen, um in einem neuen Kapitel die Erweiterung des Zahlbegriffes zu behandeln. Auf der Schule pflegt man dabei wohl immer folgende Schritte zu tun:

1.) Einführung der Brüche und Bruchrechnen.
2.) Nach den allgemeinen Anfängen des Buchstabenrechnens Behandlung der negativen Zahlen.
3.) Mehr oder minder ausführliche Darlegung des Begriffes der Irrationalzahl an Beispielen bei verschiedenen Anlässen, wobei dann allmählich die Vorstellung des Kontinuums aller reellen Zahlen entsteht.

Es bleibt der Willkür überlassen, in welcher Reihenfolge man die ersten beiden Punkte behandeln will; lassen Sie uns hier mit kann an dieser Wissenschaft gewiß nicht viel daran sein, und ihr kommt nur eine ganz untergeordnete Stellung zu. Es genügt wohl aber, solchen Argumenten entgegenzuhalten, daß der Mathematiker, wenn er selbst mit Zahlen und Formeln operiert, keineswegs bloß ein minderwertiges Abbild der fehlerlosen Maschine ist, daß er keineswegs nur der „gedankenlose Denker" von Thomae ist, vielmehr stellt er sich selbst seine Probleme zu bestimmten interessanten und nützlichen Zwecken und führt sie in immer wieder neuer und eigenartiger Weise aus. Nur zu seiner Entlastung von gewissen in gleicher Form immer wiederkehrenden Operationen hat er die Rechenmaschine ersonnen, die sie ihm abnimmt, und dabei – und das darf man wohl am wenigsten vergessen – ist er eben wieder der Mathematiker, der sie erfunden hat, und der ihr zu seinen vernünftigen Zwecken die Aufgaben stellt, die sie lösen soll.

Lassen Sie mich diesen Abschnitt mit dem Wunsche abschließen, daß bei der großen Bedeutung der Rechenmaschine auch weitere Kreise mit ihr bekannt würden, als das heute leider noch der intuitive Anschauung von der Bedeutung der Zahlen kann sie unmöglich haben. So werden wir es auch nicht als Zufall auffassen wollen, daß ein Mann wie *Leibniz*, der ebenso ein abstrakter Denker ersten Ranges, wie ein Mann von hervorragendster praktischer Begabung war, gleichzeitig der *Vater der rein formalen Mathematik* und der *Erfinder der ersten Rechenmaschine* ist; seine Maschine ist uns noch heute als eins der kostbarsten Besitztümer des Kestnermuseums in Hannover erhalten. Ist es auch historisch nicht beglaubigt, so möchte ich doch annehmen, daß Leibniz mit der Erfindung der Rechenmaschine nicht nur praktische Zwecke verfolgen wollte, sondern auch geradezu den rein formalen Charakter der mathematischen Exekutive in helles Licht setzen wollte.

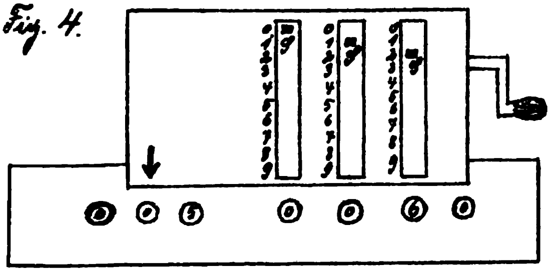
Gewiß aber hat Leibniz mit der Konstruktion der Rechenmaschine den *Wert des mathematischen Denkens* nicht herabsetzen wollen, und doch zieht man jetzt aus der Existenz der Rechenmaschine gelegentlich solche Schlüsse. Kann die Tätigkeit einer Wissenschaft, so sagt man wohl, auch durch eine Maschine geleistet werden, so *schine ganz elementar ist, und nur eine praktische Realisation der Regeln darstellt, die man beim numerischen Rechnen ohnehin anwendet.* Daß die Maschine freilich wirklich zuverlässig funktioniert, daß alle Teile unbedingt sicher ineinandergreifen, ohne daß Sperrungen eintreten, daß die Zahlenrädchen sich nicht weiter drehen, als notwendig, u. s. f. das ist die große Leistung des Konstrukteurs und des ausführenden Mechanikers.

Sehen wir uns noch einen Moment die *allgemeine Bedeutung der Tatsache an, daß es solche Rechenmaschinen wirklich gibt*, die dem Mathematiker die rein mechanische Arbeit des numerischen Rechnens abnehmen, und die es schneller und sogar in höherem Maße fehlerfrei ausführen; denn die Flüchtigkeitsfehler menschlichen Rechnens können der Maschine nicht unterlaufen. *Wir werden in der Existenz einer solchen Maschine geradezu eine Bestätigung dafür erblicken können, daß für das Rechnen nicht die Bedeutung der ganzen Zahlen in Betracht kommt, sondern daß dafür allein die formalen Rechenregeln wesentlich sind*; denn nur diese kann die Maschine befolgen – so ist sie eben eingerichtet –, eine wird nicht wie vorhin $\{{}^{60}_{+12}$ addiert, sondern $\{{}^{\;\;60}_{+12\cdot}$, oder mit andern Worten 60 + 120, indem die 2 auf das Zehner-, die 1 auf das Hunderterzählrad übertragen wird. Wir erhalten also richtig 180 = 15 . 12. Dieses Verfahren ist, wie Sie sehen eigentlich die genaue maschinelle Uebersetzung des beim schriftlichen Multiplizieren üblichen Verfahrens, bei dem man die Produkte der einzelnen Ziffern des Multiplikators in den Multiplikanden, jedes um eine Stelle gegen das vorangehende verschoben, untereinander schreibt und addiert. Genau so multipliziert man hier ganz allgemein mit mehrstelligen Zahlen, indem man nach gewöhnlicher Multiplikation mit den Einern den Schlitten um 1, 2 ... Stellen nach rechts schiebt, und dann jeweils die Kurbel so oft dreht, als die Zehner, Hunderter ... des Multiplikators angeben.

Wie man andere Aufgaben mit der Maschine rechnet, mögen Sie sodann direkt am Apparat sehen; hier genüge die Bemerkung, daß die Subtraktion und Division auf Drehung der Kurbel im entgegengesetzten Sinne beruht.

Lassen Sie mich zusammenfassend nur noch bemerken, daß das theoretische Prinzip der Majenige Einrichtung der Maschine schildern, die ein bequemes Operieren auch mit mehrziffrigen Multiplikatoren gestattet. Wollen wir etwa 15.12 rechnen, so müßten wir nach dem bisher auseinandergesetzten Verfahren 15-mal drehen, und außerdem müßte, falls man weiterhin am linken Zählwerk des Schlittens den Multiplikator fixiert haben wollte, auch dort eine Zehnerübertragung angebracht sein. Beides wird durch folgende Einrichtung vermieden: Wir führen zunächst die Multiplikation mit 5 aus, so daß auf dem Schlitten links 5, rechts 60 erscheint. Nun verschieben wir

Fig. 4.



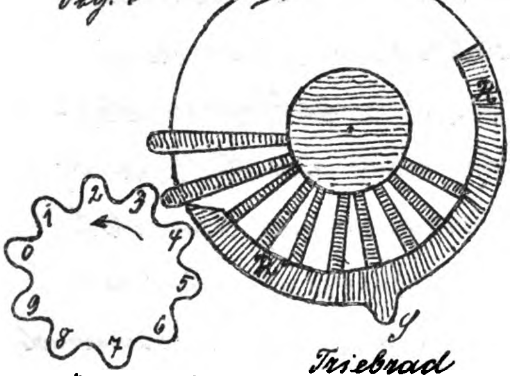
den Schlitten um eine Stelle nach rechts, so daß sein Einerzählrad ausgeschaltet wird, sein Zehnerzählrad aber unter den Einerschlitz der Trommel kommt u. s. f., während von dem am linken Ende befindlichen Zählwerk statt des Einerrades das Zehnerrad mit dem von der Kurbel ausgehenden Zahngetriebe in Verbindung kommt. Drehen wir jetzt also die Kurbel einmal herum, so erscheint links eine 1 an der Zehnerstelle, so daß wir nun 15 lesen; rechts aber hin geschehen wäre. Die Details dieser Konstruktion können Sie nur durch Betrachtung der Apparates selbst genau verstehen. Ich brauche hier um so weniger näher darauf einzugehen, als gerade für die Zehnerübertragung die verschiedensten Prinzipien bei den verschiedenen Systemen sich angewandt finden, doch empfehle ich Ihnen die genaue Betrachtung unserer Maschine als eines Beispieles einer äußerst sinnreichen Konstruktion sehr. Unsere Sammlung enthält die einzelnen Konstruktionsteile der Brunsviga – die bei der fertigen Maschine so gut wie unsichtbar sind – noch einmal abgetrennt für sich, so daß Sie ein wirkliches vollständiges Bild der Einrichtung gewinnen können.

Die Wirksamkeit der Maschine, soweit wir sie bisher kennen gelernt haben, können wir im wesentlichen dadurch in ein Wort zusammenfassen, daß wir sie als Additionsmaschine bezeichnen, die zu der rechts auf dem Schlitten bereits stehenden Zahl bei jeder Kurbeldrehung einmal den Multiplikanden addiert.

Endlich will ich noch im allgemeinen die-bis 36 = 3 · 12 bezw. 48 = 4 · 12.

Nun drehen wir aber ein fünftes Mal: Wieder muß nach der gegebenen Erklärung das Einerrad um 2 Einheiten weiter, also wieder zurück auf 0, das Zehnerrad um eins weiter auf 5 springen, und wir hätten das falsche Resultat 50, statt des richtigen 5 · 12 = 60. Drehen wir die Kurbel wirklich, so zeigt der Schlitten in der Tat kurz vor Vollendung der Drehung die Zahl 50; führen wir aber die Drehung ganz aus, so springt noch im letzten Moment die 5 in eine 6 über, so daß das richtige Ergebnis dasteht. Hier ist also noch etwas in Tätigkeit getreten, was wir bisher noch nicht beschrieben hatten, und was bei den Rechenmaschinen der eigentlich feinste Punkt aller Konstruktionen ist: die sogenannte Zehnerübertragung. Ihr Prinzip ist folgendes: Geht eines der Zählräder des Schlittens (wie im Beispiel das Einerrad) durch Null, so drückt es einen sonst seitlich gestellten und unwirksamen Zahn des nächsten Triebrades (für die Zehner) in eine Stellung, in der er in sein zugehöriges Zählrad (Zehnerrad) eingreift, so daß dieses um eine Einheit mehr vorgeschoben wird, als das ohne-

Fig. 3



war, wird nun ein auf dem Umfang der Radscheibe aufgesetzter Ring R gegen diese gedreht, und dieser läßt je nach der Marke, auf die man S außen am Schlitz einstellt, 0, 1 ... oder 9 der beweglichen Zähne nach außen springen. (in Fig. 3 zwei Zähne). Diese Zähne greifen nun direkt in die Zählräder unter den entsprechenden Öffnungen des Schlittens ein, und bei einer Kurbeldrehung verschiebt daher jeder dieser Triebräder das entsprechende Zählrad des Schlittens um soviele Einheiten, als bei ihm Zähne vorspringen, d. h. als man außen mittelst des zugehörigen Stiftes S eingestellt hatte. Demnach muß in der Tat im obigen Beispiel, wenn wir von der Nullstellung ausgehen, nach einer Kurbeldrehung das Einerrad auf 2, das Zehnerrad auf 1 springen, also 12 erscheinen. Bei einer zweiten Kurbeldrehung wird das Einerrad wieder um 2, das Zehnerrad wieder um eine Einheit weitergeführt, so daß 24 erscheint, und ebenso finden wir bei 3 oder 4 Kurbeldrehungen nach-

Wie erzielt nun der Apparat dieses Resultat? Zunächst ist links auf dem Schlitten unter dem Loche des Zählwerkes ein <u>Zählrad</u> angebracht, dessen Umfang in gleichen Abständen die Ziffern 0, 1 ... 9 trägt. Eine Zahnradübertragung bewirkt, daß dieses Rad bei jeder Umdrehung der Kurbel um ein Zehntel seines Umfanges verschoben wird, so daß seine oberste, unter dem Loche des Schlittens sichtbare Ziffer in der Tat die Anzahl der Kurbeldrehungen, also den Multiplikator angibt.

Was nun das <u>Zustandekommen des Produktes</u> anlangt, so befindet sich unter jedem Loche der rechten Seite des Schlittens ein analog gebautes Zählrad. Wie aber kommt es, daß jetzt bei ein und derselben Kurbeldrehung im obigen Falle das eine um 1 Einheit, das andere gleichzeitig um 2 Einheiten weiterspringt? Hier setzt die konstruktive Eigentümlichkeit der Brunsviga ein. Unter jedem Schlitze der Trommel befindet sich nämlich auf der Kurbelachse eine flache <u>Radscheibe</u> (Triebrad), auf der 9 in radialer Richtung verschiebbare Zähne angebracht sind. Durch den nach außen ragenden Stift S, von dem oben die Rede

Das Verfahren ist folgendes: Zunächst stelle man vermöge der aus der Trommel hervorragenden Stifte den Multiplikand ein, d.h. man stelle von rechts beginnend den ersten Hebel auf die im Einer, den zweiten auf die im Zehner stehende Ziffer des Multiplikanden u.s.f. Ist 12 der Multiplikand, so wird der erste Hebel auf 2, der zweite auf 1 zu stellen sein; alle andern bleiben in der Nullstellung (vgl. Fig. 1).

Nunmehr drehe man die Kurbel einmal rechtsherum. Dann erscheint unter den Löchern des Schlittens der Multiplikand – in unserm Falle also eine 2 im ersten Loche rechts, eine 1 im zweiten, während überall sonst Nullen stehen bleiben. Gleichzeitig aber läßt ein Zählwerk, dessen Ziffern in einer Reihe von Löchern links am Schlitten zum Vorschein kommen, eine 1 erscheinen, zum Beweise, daß wir einmal die Kurbel gedreht haben (Fig. 2). Hat man nun überhaupt einen einziffrigen Multiplikator, so drehe man die Kurbel so oft, als dieser angibt; es wird dann der Multiplikator links auf dem Schlitten angegeben, während das Produkt rechts am Schlitten in Erscheinung tritt.

angebracht, der „Schlitten", der gegen die Trommel hin und her verschiebbar ist; an der rechten Seite ragt aus der Trommel eine Kurbel hervor, die mit der Hand gedreht wird. An der Trom-

Fig. 1.

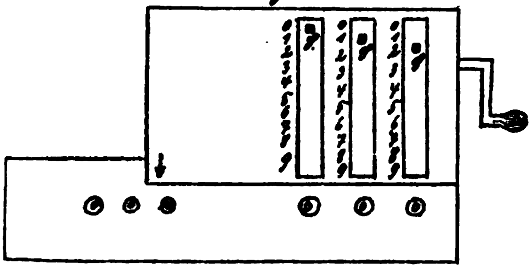
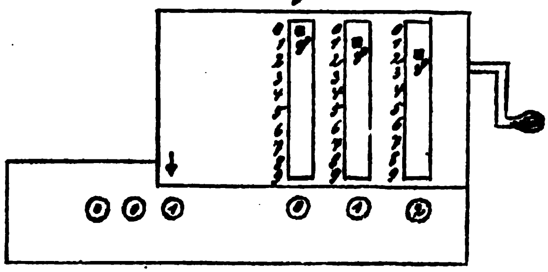


Fig. 2



Vor nach

der ersten Kurbeldrehung

mel sind nebeneinander eine Reihe von Schlitzen angebracht, neben deren jedem von oben nach unten die Ziffern 0, 1, 2 . . . 9 stehen; ein aus jedem Schlitz hervorragender Stift S kann auf eine dieser Ziffern eingestellt werden. Jedem dieser Schlitze entspricht auf dem Schlitten eine Oeffnung, unter der eine Ziffer erscheinen kann.

Ich denke, daß die Einrichtung der Maschine Ihnen am besten klar werden wird, wenn ich Ihnen die Ausführung einer <u>bestimmten</u> Rechenoperation und die Art, wie die Maschine sie zu Stande bringt, beschreibe. Ich wähle dafür die <u>Multiplikation</u>.

besitzen in unserer mathematischen Sammlung eine der verbreiteten Typen, die „*Brunsviga*", die von der Firma Grimme, Natalis und Comp. in Braunschweig vertrieben wird. Es ist eine der kompendiösesten und einfachsten Maschinen, und wenn sie auch keineswegs die beste ist, so besitzt sie doch den großen Vorzug verhältnismäßiger Billigkeit; sie kostet etwa 200 – 300 Mark. Ihre Konstruktion stammt von dem russischen Mathematiker *Odhner*, und ist ursprünglich unter dem Namen *Arithmometer* bekannt. Diese Maschine will ich Ihnen hier als Beispiel etwas näher erläutern, andere Konstruktionen finden Sie in den genannten Büchern beschrieben. Meine Beschreibung kann Ihnen freilich ein wirkliches Verständnis der Maschine nur dann vermitteln, wenn Sie sich sie nachher ganz genau in der Nähe ansehen und sich von ihrem Funktionieren durch eigene Benutzung überzeugen; die Maschine steht Ihnen dazu nach der Vorlesung stets zur Verfügung.

Was zunächst das *äußere Ansehen der Brunsviga* angeht, so zeigt sie schematisch etwa folgendes Bild: An einem größeren festen Kasten, der „*Trommel*", ist unten ein kleineres längliches Gehäuse

Anordnungen der Rechenschemata, Produkt- und Quadrattafeln, insbesondere aber die bald eingehender zu besprechenden Rechenmaschinen. Unter B. hingegen finden Sie alles Rechnen behandelt, das nur die Größenordnung des Resultats d. h. seine ersten geltenden Ziffern kennen lernen will, insbesondere Logarithmentafeln und Verwandtes; den Rechenschieber, der ja eigentlich nur eine graphische Logarithmentafel in besonders geeigneter Anordnung ist, endlich auch die zahlreichen wichtigen graphischen Methoden. – Neben diesem Referat kann ich Ihnen noch das kleine Buch von J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen [1] empfehlen, das in angenehmer Darstellung von einem Kenner des Gebietes geschrieben, eine rasche Orientierung gibt.

Von allem, was sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen bezieht, will ich Ihnen nun genauer nur die Rechenmaschine vorführen, die Sie in sehr vielen verschiedenen sinnreichen Construktionen heute in jedem größeren Bankhause oder Bureau in Anwendung finden, und die also für die Praxis in der Tat von größter Bedeutung ist. Wir

1.) Leipzig 1900.

xelaufgaben.

3) eine Einsicht in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

Dies sind alles Formulierungen, denen ich mich aus voller Ueberzeugung anschliesse! –

4. <u>Praxis des Rechnens mit ganzen Zahlen.</u>

Den letzten vorwiegend abstrakten Erörterungen will ich jetzt, meine Herren, konkretere Dinge folgen lassen, indem ich mich der <u>Technik des numerischen Rechnens</u> zuwende. Von der zur Orientierung geeigneten Literatur werde ich vor allem wieder den einschlägigen Encyklopädieartikel über <u>Numerisches Rechnen</u> von <u>R. Mehmke</u> nennen (Encykl. Bd. I, Teil 2, F.) Ich werde Ihnen am besten einen allgemeinen Ueberblick über die hierher gehörigen Gegenstände geben können, wenn ich in Kürze die Disposition dieses Artikels wiedergebe. Er zerfällt zunächst in zwei Teile, nämlich A.) <u>die Lehre vom genauen Rechnen</u>, und B.) <u>die Lehre vom genäherten Rechnen</u>. Unter A. gehören alle Methoden, die das genaue Rechnen mit grossen ganzen Zahlen erleichtern sollen, so <u>bequeme</u>

Lehrers; eine umfangreiche Orientierung im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik im weitesten Sinne, und schließen so ein erwünschtes Korrektiv gegen zu weit gehende Zersplitterung der Wissenschaft ein.

Ich verweise hier noch einmal auf unsere oben genannten Dresdener Vorschläge, um den letzten Bemerkungen eine praktische Wendung zu geben. Da empfehlen wir geradezu die angewandte Mathematik, welche in die Lehramtsprüfung seit 1898 als besonderes Fach eingesetzt ist, als notwendigen Bestandteil jeder normalen mathematischen Ausbildung, so daß die Lehrbefähigung für reine und angewandte Mathematik stets kombiniert erscheinen soll. Ferner aber sei erwähnt, was die Unterrichtskommission in dem sog. „Meraner Lehrplan" 1) als Ziel des mathematischen Unterrichts auf Oberprima hinstellt, es ist ein dreifaches:

1) ein wissenschaftlicher Überblick über den systematischen Aufbau der Mathematik.

2) eine gewisse Fertigkeit in der vollständigen numerischen und graphischen Behandlung von Ein-

1) Reformvorschläge für den math. und naturw. Unterricht überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Aerzte zu Meran. (Leipzig 1905.) – Vgl. auch den Abdruck im Gesamtbericht der Kommission pag. 93 [citiert S. 4.] sowie in Klein-Schimmack, pag. 208. [citiert S. 6]

Forschung eine *Arbeitsteilung* zwischen der reinen und angewandten Wissenschaft stattfinden, aber für die Aufrechterhaltung des Zusammenhanges muß dann doch anderweitig gesorgt werden, wenn unsere Verhältnisse gesund bleiben sollen. Und jedenfalls, und das sei hier besonders betont, *an der Schule ist eine solche Arbeitsteilung, eine weitgehende Specialisierung des einzelnen Lehrers unmöglich*. Denken Sie sich, um die Sache kraß auszudrücken, an einer Schule etwa einen Lehrer angestellt, der Zahlen nur als bedeutungslose Symbole behandelt, einen zweiten, der es versteht, aus diesen bedeutungslosen Symbolen die anschaulichen Zahlen herauszupräparieren, einen dritten, vierten, fünften endlich, der die Anwendung dieser Zeichen in der Geometrie, der Mechanik, der Physik kennt. Nun werden diese verschiedenen Lehrer nebeneinander auf den Schüler losgelassen. Sie sehen, daß so eine Unterrichtsorganisation unmöglich ist; weder werden die Dinge so an das Verständnis des Schülers herangebracht werden können, noch werden sich die einzelnen Lehrer untereinander auch nur verstehen können. So verlangen die Bedürfnisse des Schulunterrichts selbst eine gewisse *Vielseitigkeit des einzelnen* liefern könnte.

Eine weitere Bemerkung möge noch das *Verhältnis zwischen logischem und anschaulichem Betriebe der Mathematik, zwischen reiner und angewandter Mathematik betreffen.* Ich habe bereits betont, daß an der Schule Anwendungen den Rechenunterricht von Anfang an begleiten, daß der Schüler die Regeln nicht nur verstehen, sondern auch wirklich etwas damit machen lernt. So sollte es normaler Weise auch stets im Betriebe der Mathematik bleiben. Die rein logischen Zusammenhänge müssen gewiß sozusagen das *feste Skelett im Organismus der Mathematik* bleiben, das ihr die ihm eigentümliche Festigkeit und Sicherheit erteilt. Aber das Lebendige der Mathematik, die wichtigsten Anregungen, ihre Wirksamkeit beruhen durchaus auf den *Anwendungen*, d. h. auf den Wechselbeziehungen jener rein logischen Dinge zu allen andern Gebieten. Die Anwendungen aus der Mathematik verbannen wäre also ebenso, als wenn man das Wesen des lebenden Tieres im Knochengerüst allein finden wollte, ohne Muskeln, Nerven und Gefäße zu betrachten.

Vielfach wird freilich bei der wissenschaftlichen entwickelt, so wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzeln beginnend lediglich nach oben wächst, sondern der erst während er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten zu seine Wurzeln tiefer und tiefer treibt. Genau so hat die Mathematik – um wieder ohne Bild zu sprechen – von einem gewissen etwa dem gesunden Menschenverstande entsprechenden Standpunkte aus ihre Entwicklung begonnen, und in dem Maße, wie man nach oben zu neuen und immer neuen Erkenntnissen fortgeschritten ist, ist man auch nach unten in der Untersuchung der Prinzipien immer weiter gegangen. Beispielweise stehen wir selbst doch hinsichtlich der Grundlagen heute auf einem anderen Standpunkte als die Forscher vor wenigen Jahrzehnten, und auch das, was wir heute als letzte Prinzipien ausgeben würden, wird man gewiß in einiger Zeit überholt haben, indem man die letzten Wahrheiten immer feiner zergliedert und auf immer Allgemeineres zurückgeführt. <u>Auch hinsichtlich der prinzipiellen Untersuchungen in der Mathematik gibt es also keinen letzten Abschluß und daher auch nicht rückwärts einen ersten Anfang, der dem Unterricht die absolute Grundlage</u>

selbst keineswegs die Meinung und weder Zustimmungen noch Widersprüche, die von dieser Annahme ausgehen, können bestehen. *Thomae* in Jena hat auf die Leute, die sich ganz ausschließlich mit jenen abstrakt logischen Untersuchungen über Dinge, die nichts bedeuten, und Sätze, die nichts aussagen, beschäftigen und darüber nicht nur jenes zweite Problem, sondern oft auch die ganze weitere Mathematik vergessen, das hübsche Wort „*gedankenlose Denker*" geprägt. Natürlich kann sich dieses Spottwort nicht auf Persönlichkeiten beziehen, die diese Untersuchungen neben so vielen andersartigen treiben.

Im Zusammenhang mit diesen Erörterungen über die Grundlagen der Arithmetik, über die ich Ihnen hiermit einen Ueberblick gegeben zu haben denke, will ich noch *einige allgemeine Dinge* vorbringen. Man hat vielfach gemeint, daß man die *Mathematik durchaus deduktiv unterrichten* könne oder gar müsse, indem man eine definitive Reihe von Axiomen an die Spitze stellt und daraus alles rein logisch herleitet. Dies Verfahren, welches man so gern durch die historische Autorität des *Euklid* stützt, ist jedenfalls nicht dem historischen Werdegang der Mathematik selbst entsprechend. Vielmehr hat sich die Mathematik

<u>unabhängiger Grundsätze oder Axiome und ihre Untersuchung auf Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit</u> der Behandlung zugänglich gemacht wird. Der zweite mehr erkenntnistheoretische Teil des Problemes, der gewissermaßen die <u>Anwendungen jener logischen Untersuchungen auf reale Verhältnisse</u> darstellt, ist damit noch nicht einmal in Angriff genommen, obwohl er natürlich zur wirklichen Durchführung einer Begründung der Arithmetik gleichfalls müßte erledigt werden. Dieser zweite Teil stellt ein <u>äußerst tiefliegendes Problem für sich</u> vor, dessen Schwierigkeiten auf allgemein erkenntnistheoretischem Boden liegen. Ich kann seine Stellung vielleicht am deutlichsten durch die etwas paradoxe Behauptung bezeichnen, daß jeder, der nur <u>reine</u> logische Untersuchungen als <u>reine</u> Mathematik gelten läßt, konsequenter Weise diesen zweiten Teil des Problems der Begründung der Arithmetik und damit die Arithmetik selbst zu der angewandten Mathematik rechnen müßte.

Ich muß das hier so deutlich ausführen, da gerade an dieser Stelle so häufig Mißverständnisse einsetzen, indem viele die Existenz des zweiten Problemes einfach übersehen. Das ist bei Hilbert schon um sie nur immer wiedererkennen zu können – sei es auch bloß, daß man an das Aussehen der Buchstaben denkt.

c) Nehmen wir aber selbst an, das gestellte Problem sei einwandfrei erledigt, die Widerspruchslosigkeit der 11 Grundgesetze rein logisch gezeigt. Dann greift doch noch eine Bemerkung Platz, auf die ich am meisten Wert legen möchte. *Man muß sich nämlich klar machen, daß durch diese Betrachtungen die eigentliche Begründung der Arithmetik noch keineswegs vollzogen ist und daß sie auch unmöglich so vollzogen werden kann.* Es ist nämlich unmöglich, auf rein logischem Wege zu zeigen, daß die Gesetze, deren Widerspruchslosigkeit da dargetan ist, wirklich für die uns anschaulich so wohlbekannten Zahlen gelten, daß die unbestimmten Dinge, von denen da die Rede ist, den realen Zahlen, und daß die Verknüpfungen, die da vorkommen, den realen Prozessen der Addition und Multiplikation in ihrer klaren Bedeutung gleich gesetzt werden dürfen. Was geleistet ist, ist vielmehr die *Zerspaltung der gewaltigen in ihrer Kompliziertheit unangreifbaren Aufgabe der Begründung der Arithmetik in zwei Teile,* deren erster, das rein logische Problem der *Aufstellung* *denkt' sind.* Sagten wir also früher bei der Auseinandersetzung des ersten Standpunktes, daß die Sicherheit der Mathematik auf der Existenz anschaulicher Dinge beruht, für die ihre Sätze zutreffen, so wird der Anhänger dieses formalen Standpunktes die *Sicherheit der Mathematik darin begründet finden, daß ihre Grundgesetze rein formal ohne Rücksicht auf ihren anschaulichen Inhalt betrachtet ein logisch widerspruchsfreies System bilden.*

Ich habe nun der Auseinandersetzung dieses neuen Standpunktes noch einige Bemerkungen anzufügen:

a) Hilbert hat diese Gedanken für die Arithmetik wohl formuliert und zu behandeln begonnen, aber noch keineswegs vollständig durchgeführt. Er hat nach dem genannten Vortrage sie noch in einer Vorlesung behandelt, seitdem aber nicht weiter bearbeitet. Wir können also sagen, *daß hier erst ein Programm vorliegt.*

b) Die Tendenz, die Anschauung zurückzudrängen und rein logische Untersuchungen zu erhalten, scheint mir ganz vollständig doch nicht durchführbar. *Einen Rest, freilich ein Minimum von Anschauung, muß man immer zurückbehalten*, die man mit den Symbolen, mit denen man operiert, verknüpfen muß;

tretenden Buchstaben a, b, c ... auch rechnen, ohne im Sinne zu behalten, dass sie eine reale Bedeutung als Zahlen haben, oder deutlicher gesagt: Es seien die a, b, c ... Dinge ohne jede Bedeutung oder Dinge, von deren Bedeutung wir nichts wissen, nur das sei ausgemacht, dass man sie gemäss jenen 11 Grundgesetzen mit einander verknüpfen darf, ohne dass jedoch diese Operationen eine uns bekannte reale Bedeutung zu haben brauchen; man kann dann genau ebenso mit den a, b, c ... operieren, wie man es für gewöhnlich mit den realen Zahlen tut. Dabei entsteht dann nur die Frage, ob man bei diesem Operieren nicht auch einmal auf Widersprüche kommen kann. Sagt man nun gewöhnlich, die Anschauung zeigt uns die Existenz von Zahlen, für welche die genannten Regeln gelten, in diesen Regeln können sich also unmöglich Widersprüche finden, so ist jetzt, nachdem wir von der realen Bedeutung der Zeichen absehen, eine solche Berufung auf Anschauliches nicht mehr zulässig. Vielmehr entsteht das ganz neue Problem, logisch zu beweisen, dass man bei beliebigem Operieren mit unseren Zeichen auf Grund der 11 Grundgesetze niemals zu einem Widerspruche kommen kann, d. h. dass jene 11 Gesetze logisch verträglich, „consisdung der ganzen Zahlen gegeben hat. Wesentlich an diese Darstellung schließt H. Weber in dem 1. Abschnitt von Weber-Wellstein I (citiert S. 8.) an; freilich zeigt es sich, daß die Ableitung dabei so abstrakt und schwer verständlich wird, daß er in einem Anhang zu dem später erschienenen dritten Bande desselben Werkes [1] eine elementarere, nur endliche Mengen benutzende Darstellung zu geben versucht hat. Auf diesen Anhang möchte ich jeden, der sich für diese Dinge mehr interessiert, zunächst verweisen.

4) Zum Schluß endlich habe ich die rein formale Theorie der Zahlen anzuführen, die wohl bis auf Leibniz zurückgeht, und die neuerdings besonders von Hilbert in den Vordergrund gebracht worden ist; für die Arithmetik kommt da sein Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik" auf dem Heidelberger Kongreß von 1904 in Betracht. [2] Die Grundauffassung ist hier diese: Hat man einmal die 11 Grundgesetze des Rechnens, so kann man mit den beliebige Zahlen ver-

1.) Angewandte Elementarmathematik. Bearb. von H. Weber, J. Wellstein, R. H. Weber. – Leipzig 1907.

2) Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 (Leipzig 1905). pag. 174 ff.

sage, daß sowohl einerseits die Reihe aller ganzen Zahlen als auch andererseits der Inbegriff aller Punkte einer Strecke spezielle Beispiele von Mengen sind – diese allgemeine Idee hat bekanntlich zuerst *Georg Cantor* in Halle zum Gegenstande systematischer mathematischer Spekulation gemacht, und die von ihm geschaffene *Mengenlehre* besitzt ja jetzt in hohem Maße das Interesse der jüngeren mathematischen Generationen. Ich werde später noch versuchen, Ihnen einen Einblick in die Mengenlehre zu verschaffen; hier möge es genügen, wenn ich die Tendenz dieser neuen Grundlegung der Zahlenlehre mit etwa folgenden wenigen Worten charakterisiere: *Es sollen die Eigenschaften der ganzen Zahlen und der auf sie bezüglichen Operationen auf allgemeine Eigenschaften der Mengen und der bei diesen statthabenden abstrakten Beziehungen zurückgeführt werden*, damit so eine eindringendere Begründung auf möglichst allgemeiner Grundlage entsteht. Als Bahnbrecher habe ich hier noch *Richard Dedekind* zu nennen, der in seiner kleinen inhaltsreichen Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen*?“ [1] zuerst eine solche Begrün-

1) Braunschweig 1888.

der Beweises als solchen hervorheben und gesondert ausdrücken soll. Peano will so eine Garantie gewinnen, daß er auch wirklich nur die von ihm ausdrücklich aufgestellten Grundsätze verwendet und kein weiteres Material aus der Anschauung mehr heranbringt; er will die Gefahr vermeiden, die der Gebrauch der geläufigen Sprache im Hineinspielen zahlreicher unkontrollierbarer Ideenassociationen und Erinnerungen an die Anschauung mit sich bringt. Nehmen Sie übrigens davon Kenntnis, daß Peano das *Haupt einer in Italien sehr ausgedehnten Schule* ist, die die Prämissen jedes einzelnen Zweiges der Mathematik ebenso in kleine Teile zerschneiden und mit dem Hilfsmittel einer „Begriffsschrift" exakt auf ihre logischen Zusammenhänge untersuchen will.

3) Wir kommen nun zu einer *modernen Weiterbildung dieser Ideen*, von der übrigens Peano bereits beeinflußt ist; ich meine diejenige Behandlung der Grundlagen der Zahlenlehre, die den *Mengenbegriff* voranstellt. Die allgemeine Idee der Menge – Sie werden sich von ihrem weiten Umfange eine Vorstellung machen können, wenn ich Ihnen

die andern aus ihnen logisch ohne weitere Hineinziehung der Anschauung erschließen lassen. Während sonst die Möglichkeit rein logischen Operierens erst *nach* Aufstellung der 11 Gesetze beginnt, kann es hier schon früher, nach jenen einfacheren Sätzen, einsetzen: *Die Grenze zwischen Anschauung und Logik wird zu Gunsten der letzteren verschoben*. Bahnbrechend für dieses Vorgehen ist *Hermann Graßmann in seinem Lehrbuch der Arithmetik* [1] *von 1861*. Als Beispiel daraus erwähne ich nur, daß das Gesetz der Commutativität sich aus dem Associativgesetz mit Hilfe des Princips der vollständigen Induktion ableiten läßt. – Neben dem Graßmannschen Buche ist wegen der Präcision seiner Darstellung insbesondere ein Buch des Italieners *Peano* zu nennen: *Arithmetices principia novo methodo exposita*. [2] Denken Sie aber nicht nach diesem Titel, daß das Buch lateinisch geschrieben ist! Es ist vielmehr im wesentlichen in einer eigenen symbolischen Sprache des Verfassers abgefaßt, die jeden einzelnen logischen Schritt

1) mit dem Zusatz „für höhere Lehranstalten" (Berlin 1861) – Die einschlägigen Kapitel sind abgedruckt in H. Graßmanns gesammelten mathematischen und physikalischen Werken (Herausgeg. v. F. Engel) Bd. II 1. (Leipzig 1904) pag. 295 – 349.

2) Augustae Taurinorum (Torino) 1889.

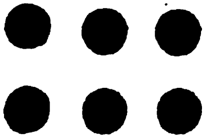
len, und folgt aus seiner Gültigkeit für eine Zahl n allemal auch die für n+1, so ist er allgemein für jede Zahl richtig. Dieser Satz, dessen Ursprung ein echt intuitiver ist, hilft in der Tat gerade über die Schranke hinweg, an der die konkrete Anschauung versagt. Das ist mehr oder minder auch der Standpunkt von *Poincaré* in seinen bekannten philosophischen Schriften.

Wenn wir die Bedeutung dieser Frage nach der Begründung unserer 11 Grundgesetze des Rechnens uns klar machen wollen, so müssen wir bedenken, daß mit der Arithmetik in letzter Linie schließlich die gesamte Mathematik auf ihnen beruht. Es ist also nicht zuviel behauptet, wenn man sagt, daß bei der auseinandergesetzten Auffassung der Rechenregeln *die Sicherheit des ganzen Lehrgebäudes der Mathematik schließlich auf der Anschauung im allgemeinsten Sinne beruht.*

2) An zweiter Stelle ist nun eine *Modification dieses ersten Standpunktes* zu nennen; sie besteht darin, daß man versucht, jene 11 Grundgesetze in eine *größere Zahl kleinerer Schritte* zu zerlegen, von denen man dann nur die einfachsten direkt der Anschauung zu entnehmen braucht, während sich

Während bei diesem Problem mehr Fragen der Erkenntnistheorie und Psychologie in Betracht kommen, handelt es sich bei dem weiteren der Begründung unserer 11 Gesetze wesentlich nur um Fragen der Logik. Wir wollen hier 4 Auffassungen scheiden:

1) Für die erste, als deren Repräsentanten ich etwa Kant nennen will, sind diese Rechenregeln unmittelbare notwendige Ergebnisse der Anschauung, wobei dieses Wort im weitesten Sinne als „innere Anschauung" oder Intuition aufzufassen ist. Keineswegs ist die Meinung dabei, daß die Mathematik durchweg sich auf die experimentell kontrollierbaren Tatsachen der äußeren groben Erfahrung stützt. Um ein einfachstes Beispiel zu nennen, wird das Kommutativgesetz begründet durch Berufung auf die nebenstehende Figur, in



der zweimal je drei Punkte vereint sind, und an der man sieht, daß man sie auch als dreimal je zwei auffassen kann: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Sagt man nun, daß bei einigermaßen großen Zahlen diese unmittelbare Anschauung zur Vermittlung der Erkenntnis nicht mehr ausreicht, so nimmt man zur Ergänzung den Satz von der vollständigen Induktion hinzu: Gilt ein Satz für kleine Zahden Dingen ganz die Hand zu lassen. Für nähere Angaben über diese von den Philosophen stets sehr lebhaft diskutierten Fragen verweise ich wieder auf den zitierten Artikel der französischen Encyklopädie und beschränke mich auf einige ganz kurze Bemerkungen. Eine sehr verbreitete Auffassung ist, dass der Zahlbegriff eng mit dem *Zeitbegriff*, dem *zeitlichen Nacheinander* zusammenhängt; unter den Philosophen sei *Kant*, unter den Mathematikern *Hamilton* als ihr Vertreter genannt. Andere wieder meinen, dass die Zahl mehr mit der *Raumanschauung* zu tun habe, sie führen den Zahlbegriff auf die *gleichzeitige Anschauung verschiedener nebeneinander befindlicher Gegenstände* zurück. Eine dritte Richtung endlich sieht in den Zahlenvorstellungen die Äusserungen einer *besonderen Fähigkeit des Geistes*, die unabhängig neben oder gar über der Anschauung von Raum und Zeit steht. Ich glaube, dass diese Auffassung gut gekennzeichnet wird durch das Zitat aus Faust, das Prof. *Minkowski* in der Anzeige seines neuen Buches über „diophantische Approximationen" auf die Zahlen anwendet:

„Göttinnen thronen hehr in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit".

Lehrer bei Gelegenheit des Überganges zum Buchstabenrechnen explizit hervorheben können, indem er sie aus zahlreichen evidenten Zahlenbeispielen herauspräpariert.

3. Die logischen Grundlagen der ganzen Zahlen.

Während der Schulunterricht zu schwierigeren Fragen natürlich noch viel weniger wird aufsteigen können, setzt die Fragestellung der *heutigen mathematischen Forschung* hier erst eigentlich ein: *Wie begründet man denn diese Gesetze, wie begründet man den Zahlbegriff überhaupt*? Hier will ich nun eine Orientierung geben, getreu der Absicht dieser Vorlesung, die Dinge des Schulunterrichts durch Betrachtung von einem höheren Standpunkte aus in neue Beleuchtung zu setzen. Und ich tue dies um so lieber, als diese modernen Gedanken auf Sie während Ihres akademischen Studiums ohnehin von allen Seiten eindringen, ohne daß Ihnen aber über ihre psychologische Wertung stets auch das Nötige gesagt wird.

Was zunächst den *Zahlbegriff selbst* angeht, so ist seine Wurzel äußerst schwer aufzudecken. Am glücklichsten fühlt man sich vielleicht noch, wenn man sich entschließt, von diesen allerschwierigwird. Nehmen Sie an, um wieder nur ein Beispiel zu geben, Sie hätten 567 . 134 zu rechnen, und es sind in beiden Zahlen die Einer, durch physikalische Messungen etwa, nur sehr ungenau bekannt. Da wird es unnötige Arbeit sein, das Produkt *genau* auszurechnen, da Sie seinen genauen Wert doch nicht garantieren können; wohl aber wird es wichtig sein, die *Größenordnung* des Produktes zu kennen, d. h. zu wissen, zwischen welchen Zehnern oder Hundertern sein genauer Wert liegt. Diese Abschätzung liefert Ihnen nun das Monotoniegesetz in der Tat unmittelbar, denn aus ihm folgt, daß die gesuchte Zahl zwischen 560 . 134 und 570 . 134 oder zwischen 560 . 130 und 570 . 140 liegt. Die weitere Durchführung dieser Ueberlegungen überlasse ich wieder Ihnen selbst; jedenfalls sehen Sie, *daß die Monotoniegesetze bei dem „abgekürzten Rechnen" fortgesetzt zur Geltung kommen*.

Was die wirkliche Verwendung dieser Dinge im Schulunterricht angeht, so kann dort von einer systematischen Darlegung aller dieser Grundgesetze der Addition und Multiplikation wohl nicht die Rede sein; nur die Gesetze der Associativität, Commutativität und Distributivität wird der

$$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10+2) = 70 + 14,$$

und wenn wir 14 in 10 + 4 zerlegen (die „Zehnerübertragung" ausführen), mit Hilfe des assoziativen Gesetzes der Addition:

$$= 70 + (10+4) = (70+10) + 4 = 80 + 4 = 84.$$

Sie erkennen in dieser Überlegung genau die einzelnen Schritte des gewöhnlichen dekadischen Ziffernrechnens wieder. Mögen Sie kompliziertere Beispiele sich selbst überlegen! Wir wollen hier nur zusammenfassend aussprechen, *daß das gewöhnliche Ziffernrechnen in fortwährender Anwendung jener 11 Grundgesetze unter steter Benutzung der für die Einer (im Einsundeins und Einmaleins) gedächtnismäßig eingeprägten Resultate besteht.*

Wo gelangen nun aber die *Monotoniesätze* zur Anwendung? Im gewöhnlichen formalen Rechnen kommen sie freilich nicht vor, wohl aber bei etwas andersartigen Aufgaben. Ich erinnere hier an das, was man bei dezimaler Schreibweise *abgekürzte Multiplikation und Division* nennt. Das ist eine Sache von größter praktischer Wichtigkeit, die nur leider auf der Schule sowie unter den Studierenden lange noch nicht hinlänglich bekannt ist, obwohl sie gelegentlich schon auf Quinta besprochen

5) es gilt das Monotoniegesetz: aus $b > c$ folgt
$$a + b > a + c.$$
Diese Eigenschaften sind sämtlich ohne weiteres einleuchtend, wenn man den anschaulichen Anzahlbegriff vor Augen hat; sie müssen aber formal herausgeschält werden, um die spätere Entwickelung logisch stützen zu können.

Was ferner das Multiplizieren anlangt, so gelten zunächst 5 genau analoge Gesetze:

1) $a \cdot b$ ist stets eine Zahl.
2) $a \cdot b$ ist eindeutig bestimmt.
3) Associativität: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$.
4) Kommutativität: $a \cdot b = b \cdot a$.
5) Monotonie: aus $b > c$ folgt $a \cdot b > a \cdot c$.

Einen Zusammenhang mit der Addition gibt endlich ein weiteres Gesetz:

6) Das Gesetz der Distributivität:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
Daß das gesamte Rechnen sich lediglich auf diesen 11 Gesetzen aufbaut, macht man sich leicht klar. Es mag genügen, wenn ich das nur an einem einfachen Beispiele zeige, etwa an der Multiplikation von 7 mit 12. Man hat nach dem Distributivgesetz:

matischer Buch, so sollte diese Encyklopädie auf jeder Schulbibliothek vorhanden sein, weil der mathematische Lehrer durch sie in den Stand gesetzt wird, seine Arbeiten nach jeder ihn möglicherweise interessierenden Richtung vorzutreiben. Für uns kommt jetzt in Betracht der erste Artikel des ersten Bandes:[1] H. Schubert, Grundlagen der Arithmetik, dessen französische sehr vervollständigte Bearbeitung von Jules Tannery und Jules Molk herrührt.

Ich will Ihnen nun, zu unserem Thema zurückgehend, die 5 Grundgesetze, auf die sich die Addition zurückführen läßt, wirklich aufzählen:

1.) $a + b$ ist stets wieder eine Zahl, d. h. die Addition ist unbeschränkt ausführbar (im Gegensatz zur Subtraktion, die es im Bereiche der positiven Zahlen nicht ist).

2) $a + b$ ist eindeutig bestimmt.

3) es gilt das associative Gesetz:

$$(a+b)+c = a+(b+c),$$

so daß man die Klammern überhaupt fortlassen kann.

4) es gilt das commutative Gesetz:

$$a+b = b+a.$$

---

1) Arithmetik und Algebra, red. von W. Fr. Meyer (1896–1904) Franz. Ausg. von J. Molk.

ganzen Zahlen genau kennt, wenn er sie natürlich auch unmittelbar dem Schüler nicht darbieten kann. Beschäftigen wir uns demgemäß weiterhin etwas näher mit den

2. fundamentalen Gesetzen des Rechnens.

Historisch hat man natürlich lange addiert und multipliciert, ohne sich von den Grundgesetzen dieser Operationen Rechenschaft zu geben. Erst in den zwanziger und dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts haben meist englische und französische Mathematiker die Fundamentaleigenschaften jener Operationen herausgearbeitet, worüber ich nähere Notizen hier jedoch nicht mitteilen will; wollen Sie mehr darüber erfahren, so empfehle ich Ihnen hier, wie ich es noch oft werde tun können, die große Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen [1], sowie die zum Teil den Charakter einer zweiten vervollständigten Auflage tragende französische Bearbeitung: Encyklopädie des sciences mathématiques pures et appliquées.[2] Wenn überhaupt ein mathe-

1) Leipzig bei B. G. Teubner, von 1898 an; Bd. I ist vollständig erschienen, Bd. II – VI im Erscheinen begriffen.

2) Paris (Gauthier-Villars) und Leipzig (Teubner) von 1904 an; Bd. I ist im Erscheinen begriffen.

Sie das mit Ihrer akademischen Bildung, Sie werden keine großen Erfolge erzielen!

Verfolgen wir nach dieser Abschweifung den Unterrichtsstoff weiter, so haben wir festzustellen, daß von Quarta an und besonders in der Tertia das Rechnen in das *vornehmere Gewand der Mathematik* sich zu kleiden beginnt, wofür charakteristisch zunächst der *Uebergang zur Buchstabenrechnung* ist. Man bezeichnet mit a, b, c oder auch x, y, z irgend welche, zunächst immer nur positive ganze Zahlen, und vollzieht nun die Regeln und Operationen des Rechnens an diesen *durch Buchstaben symbolisierten Zahlbegriffen*, womit man vom konkreten anschaulichen Inhalt der Zahlen abgeht. Hierin ist ein so *großer Schritt der Abstraktion* getan, daß man wohl behaupten kann, *die eigentliche Mathematik setze mit dem Buchstabenrechnen ein*. Freilich darf dieser Uebergang an der Schule sich durchaus nicht plötzlich vollziehen, sondern der Schüler muß allmählich zu diesem Grade der Abstraktion geführt werden.

Für diesen Unterricht nun erscheint es unbedingt nötig, daß der Lehrer die *logischen Gesetze und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der* tisch[1] *und akademisch gebildeten Lehrern*. In oder nach Quinta tritt im Rechenunterricht an Stelle des seminaristisch vorgebildeten Lehrers der Akademiker, und infolgedessen tritt häufig für die Schüler eine *bedauerliche Diskontinuität* ein. Die armen Jungen müssen plötzlich mit ganz andern Ausdrücken operieren, als sie bisher gelernt hatten, während die alten nun streng verpönt sind. Ein kleines Beispiel sind die verschiedenen Multiplikations=zeichen, das ×, das der Elementarlehrer, den Punkt, den der Akademiker mit Vorliebe gebraucht. Dieser Gegensatz ist nur dadurch zu überbrücken, daß die Akademiker sich mehr um den seminaristischen Kollegen kümmern und eine Verständigung mit ihm suchen. Es wird Ihnen dies leichter gelingen, wenn Sie bedenken, welchen Respekt man vor den *Leistungen des Volksschullehrerstandes* haben muß. Stellen Sie sich nur vor, eine wie große *methodische Durchbildung* dazu gehört, um immer wieder Hunderttausenden dummer, durchaus unvorgebildeter Kinder die Lehren des Rechnens beizubringen! Versuchen

---

1.) Das bezieht sich auf die „Seminare" zur Ausbildung von Volksschullehrern, die mit den oben erwähnten „Seminaren an höheren Schulen" nicht das mindeste zu tun haben.

kostet das?", bildet den Angelpunkt eines großen Teiles des Unterrichtsmaterials. Das steigert sich dann bald zu solchen Aufgaben, den sog. *eingekleideten Aufgaben*, wo zum Ansatz der Rechnung bereits eine selbständige Ueberlegung nötig ist; es führt zu den Aufgaben der *Regeldetri*, der *Mischungsrechnung* et. c. Zu den Worten *anschaulich* und *genetisch*, mit denen wir vorhin den Schulunterricht charakterisierten, können wir als drittes Charakteristicum auch die *praktischen Anwendungen* stellen.

Sollen wir das *Ziel des Rechenunterrichtes* hier endlich noch in kurzen Worten zusammenfassen, so würden wir sagen: *er erstrebt eine klare Sicherheit in der Handhabung der Rechenregeln auf Grund paralleler Entwicklung der verschiedenen in Betracht kommenden geistigen Qualitäten, ohne daß etwa dabei die logischen Zusammenhänge als solche besonders herauspräpariert werden.*

Ich gedenke hier nebenbei gerne eines Gegensatzes, der auf der Schule häufig eine fatale Rolle spielt, nämlich des *Gegensatzes* zwischen seminarisschiebbar angebracht sind. Indem man diese Kugeln geeignet zusammenschiebt, liest man das Resultat der Multiplikation, und auch seine dezimale Schreibweise sofort ab. – Die *dritte Stufe* endlich bringt das *Rechnen mit mehrstelligen Zahlen* auf Grund der bekannten einfachen Regeln, deren Allgemeingültigkeit dem Schüler einleuchtet oder doch einleuchten sollte. Freilich genügt diese Evidenz meist wohl noch nicht, um dem Schüler die Regeln völlig zu eigen zu machen, und so muß ihr wohl recht oft noch mit dem bekannten autoritativen Mittel Nachdruck gegeben werden: „So ist es, und weißt Du das nicht, dann geht es Dir schlecht!“.

Noch eine Seite dieses ganzen Unterrichts will ich hier hervorheben, weil sie im Hochschulunterricht gerade meist vernachlässigt zu werden pflegte. Es werden nämlich von vornherein die *Anwendungen des Rechnens im praktischen Leben* aufs stärkste betont. Die Zahlen werden von Anfang an an konkreten Beispielen des praktischen Lebens vorgeführt, gar bald rechnet der Schüler mit *Münzen*, *Maßen*, *Gewichten*, und die im täglichen Leben so wichtige Frage „*was*

Punkten oder als Anzahlen aller möglichen, den Kindern ohne weiteres geläufigen Gegenstände. Das Addieren und Multiplizieren wird alsdann anschauungsgemäß abgeleitet und eingeprägt. Auf der zweiten Stufe wird der Zahlenkreis von 1 bis 100 behandelt, und hier wird dann, wie auch zum Teil schon vorher, die Einführung der arabischen Ziffern mit Stellenwert und das dezimale System mit Nachdruck geübt. Nebenbei will ich hier bemerken, daß die Bezeichnung „arabische" Ziffern, wie so viele ähnliche in der Wissenschaft, historisch unrichtig ist; diese Schreibweise rührt nämlich in der Tat von den Indern, nicht den Arabern her. – Ein weiteres Hauptziel dieser Stufe ist auch die Kenntnis des „Einmaleins"; was 5×7 oder 3×8 ist, muß man stets auswendig wissen, und so lernt der Schüler auch das Einmaleins auswendig, freilich erst nachdem er sich es an realen Gegenständen anschaulich klar gemacht hat. Dazu dient vorzugsweise die Ihnen allen wohl bekannte sog. Rechenmaschine, die man besser etwas weniger großartig Rechenbrett nennt; sie besteht aus 10 übereinander befestigten Drähten, auf denen je 10 Kugeln frei ver-wir uns für unsere Kritik orientieren wollen.

Die ganze Aufgabe, die Eigenschaften der ganzen Zahlen und das Rechnen mit ihnen der Auffassung der Kinder näher zu bringen, und sie zur vollen Beherrschung des Stoffes zu führen, ist eine äusserst schwierige, und erfordert die Arbeit mehrerer Jahre, von dem ersten Schuljahre an bis in die Sexta und Quinta des Gymnasiums hinein. Die Art des heute überall bei uns herrschenden Unterrichtsbetriebes kann ich vielleicht am besten durch die Stichworte anschauungsmässig und genetisch charakterisieren, d. h. das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten an aufgebaut; hierin liegt ein präciser Unterschied gegen den meist auf Hochschulen üblichen logischen und systematischen Unterrichtsbetrieb. Den gesamten Unterrichtsstoff gliedert man etwa in folgender Weise, die freilich genau keineswegs einheitlich feststeht: Das ganze erste Jahr wird durch das Rechnen mit den Zahlen von 1 bis 20 ausgefüllt, das erste Halbjahr ungefähr mit denen von 1 bis 10. Die Zahlen werden eingeführt als Zahlbilder aus übergehen, den wir nach den 3 bereits genannten Fächern gliedern wollen:

Erster Hauptteil: Arithmetik.

I. Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen.

Das erste ist da natürlich, daß wir mit der *Grundlage aller Arithmetik*, dem *Rechnen mit positiven ganzen Zahlen* beginnen. Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, wie man diese Dinge an der Schule treibt; dann wird die weitere Untersuchung folgen, was, vom höheren Standpunkte aus betrachtet, darin alles enthalten ist. Wenden wir uns also zur Betrachtung der

1. *Einführung der Zahlen auf der Schule;*

ich begnüge mich da mit kurzen Andeutungen, und Sie werden sich an der Hand dieser wohl auch noch erinnern, wie Sie selbst diese Dinge einst lernten. Bei solchen Auseinandersetzungen kann natürlich meine Absicht keineswegs die sein, Sie in die Praxis des Unterrichts wirklich einzuführen, wie dies die Seminare an den höheren Schulen tun sollen; ich bringe vielmehr nur das Material heran, an dem fach in Uebereinstimmung mit unsern Tendenzen, es gibt aber auch viele Gegensätze, und da er eine ausgesprochen subjektive, temperamentvolle Persönlichkeit ist, kleidet er gerade diese Gegensätze oft in sehr lebhafte Worte. Um ein Beispiel zu nennen, so verlangen die Vorschläge der Unterrichtskommission des Naturforschertages schon auf Quinta eine Stunde geometrische Propädeutik, während man zur Zeit damit erst auf Quarta beginnt. Es ist nun eine seit langer Zeit erörterte Frage, welcher Modus der bessere ist, auch die Ausführung auf der Schule hat öfters gewechselt; aber Simon erklärt die Stellungnahme der Kommission, über die man also doch jedenfalls streiten kann, rundweg für „schlimmer als ein Verbrechen", ohne dieses Urteil auch nur im mindesten zu begründen. Solche Stellen ließen sich noch manche finden. – Als Vorläufer des genannten Buches erwähne ich noch <u>Simons Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis</u>. 1.)

Lassen Sie nach dieser kurzen Einleitung uns jetzt zu unserem eigentlichen Gegenstande

1.) Leipzig 1906.

würden wir vieles aus dem bisherigen Unterrichtsstoff aufgeben, was ja an sich oft recht interessant sein mag, aber seiner allgemeinen Bedeutung nach im Zusammenhang mit der ganzen modernen Kultur weniger wesentlich erscheint. Vor allem wird eine starke Ausbildung der Raumanschauung dabei stets eine Hauptsache bleiben müssen. Der Unterricht soll nach oben zu soweit in die Anfänge der Infinitesimalrechnung hineingehen, dass etwa der Naturwissenschaftler oder Versicherungsfachmann das mathematische Rüstzeug, das er auf alle Fälle braucht, bereits von der Schule mitbringt. Diesen relativ modernen Ideen gegenüber hält Weber-Wellstein im wesentlichen an der alten Stoffbegrenzung fest; mein Zweck in dieser Vorlesung ist natürlich der, die neue Auffassung zu propagieren.

An dritter Stelle habe ich Ihnen noch ein sehr amüsantes Buch des wie Weber und Wellstein in Straßburg wirkenden Max Simon zu nennen, dessen neue Auflage gerade erschienen ist: Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.[1] Simon befindet sich viel-

1) 2. Auflage. München 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen.

se Forderung nie in so hohem Maße vernachlässigt, wie auf der Universität. Diese „<u>psychologischen Momente</u>" nun will ich gerade in meiner Vorlesung mit besonderem Nachdruck stets zur Geltung bringen.

Ein weiterer Gegensatz zwischen Weber-Wellstein und mir bezieht sich auf die <u>Abgrenzung des Inhalts der Schulmathematik</u>: Weber und Wellstein sind da „<u>konservativ</u>", ich „<u>fortschrittlich</u>" gesinnt. Diese Dinge sind ausführlich im Klein-Schimmack berührt. Wir, man nennt uns wohl die „<u>Reformer</u>", wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den <u>Funktionsbegriff</u> stellen, als denjenigen Begriff der Mathematik der letzten 200 Jahre, der überall, wo man mathematisches Denken braucht, eine centrale Rolle spielt. Ihn wollen wir so früh als möglich im Unterricht herauszuarbeiten beginnen, unter <u>steter Benutzung der graphischen Methode</u>, der Darstellung eines jeden Gesetzes im x-y-Systeme, die heute bei jeder praktischen Verwendung der Mathematik selbstverständlich benutzt wird. Um diese Neuerung zu ermöglichen, men, um sein Interesse packen zu können und das wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in <u>anschaulich faßbarer Form</u> darbietet. Erst auf den obersten Klassen ist auch eine abstraktere Darstellung möglich. Um ein Beispiel zu geben: das Kind kann es unmöglich verstehen, wenn man die Zahlen axiomatisch als Dinge ohne Bedeutung, mit denen man nach vereinbarten formalen Regeln operiert, erklärt; vielmehr verbindet es mit den Zahlen stets durchaus <u>reale Begriffe</u>, sie sind nichts als Anzahlen von Nüssen, Äpfeln und ähnlichen guten Dingen, und nur in dieser Form kann sie ihm der Anfangsunterricht darbieten, und wird sie ihm in der Tat auch stets darbieten. In dieser Art aber sollte auch überhaupt im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft gehalten werden mit allem, was den Menschen gemäß seinen sonstigen Interessen bewegt, und was nur irgend in Beziehung zu ihr sich bringen läßt. Das ist es ja, was die neueren Bestrebungen zur Hervorhebung der <u>angewandten Mathematik</u> auf der Universität mit bezwecken; auf der Schule hatte man übrigens die-

An zweiter Stelle nenne ich Ihnen nun das Werk, das unter den Publikationen der letzten Jahre am meisten eine der meinigen ähnliche Tendenz verfolgt, die dreibändige *Encyklopädie der Elementarmathematik von H. Weber und J. Wellstein*; für dieses Semester kommt wesentlich der von *H. Weber* bearbeitete erste Band in Betracht: *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis*.[1] Gewisse Unterschiede, die zwischen diesem Werke und dem Plane meiner Vorlesung obwalten, will ich sogleich näher bezeichnen. Bei Weber-Wellstein wird der gesammte Aufbau der Elementarmathematik systematisch und logisch entwickelt in der gereiften Sprache, die der fortgeschrittene Studierende aufnehmen kann; davon, wie diese Dinge im Schulunterricht wirklich vorkommen, ist nicht die Rede. Die *Darstellung auf der Schule* muss nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, *psychologisch, nicht systematisch* sein. Der Lehrer muss sozusagen ein wenig *Diplomat* sein, er muss auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht neh-

---

1.) 2. Auflage. Leipzig 1906. – Citiert als „Weber-Wellstein I“.

behandeln. Wenn ich mich dabei öfters auf den Unterrichtsbetrieb an der Schule beziehen werde, so liegen dem nicht bloß vage Vorstellungen, wie die Sache etwa sein könnte, oder gar eigene weit zurückliegende Schulerinnerungen zu Grunde, sondern ich stehe ständig mit Herrn Schimmack in Verbindung, der jetzt am hiesigen Gymnasium wirkt, und der mich über den gegenwärtigen, gegenüber früheren Jahren in der Tat wesentlich weiter entwickelten Stand des Unterrichts fortlaufend informiert. In diesem Wintersemester werde ich „die drei großen A", das ist *Arithmetik, Algebra und Analysis* behandeln, während die Geometrie einer Fortsetzung des Kollegs im nächsten Sommer vorbehalten bleibt. Ich bemerke hierzu, daß die auf höheren Schulen übliche Sprache jene drei Fächer unter dem einen Wort „*Arithmetik*" zusammenfaßt, wie wir denn überhaupt noch öfters Abweichungen des mathematischen Sprachgebrauches der Schulen von dem der Hochschulen finden werden. Nur der lebendige Kontakt, das sehen Sie an diesem kleinen Beispiele, kann da eine Verständigung herbeiführen!

Verständnis gehört.

Ich will nun noch etwas Specielleres als Einleitung in die gegenwärtige Vorlesung sagen, indem ich Ihnen einige für uns nützliche Bücher zur Kenntnisnahme empfehle. Ich habe zum ersten Male vor drei Jahren eine Vorlesung ähnlicher Tendenz gehalten; mein damaliger Assistent, Herr R. Schimmack hat den Gegenstand weiter durchgearbeitet, und kürzlich ist ein erster Teil jener Vorlesung [1] im Druck erschienen. Hier ist die Rede von den verschiedenen Arten der Schulen, einschl. der Hochschulen, von dem allgemeinen Betriebe des mathematischen Unterrichts auf ihnen, von ihrem gegenseitigen Ineinandergreifen u. dgl.; ich werde im folgenden gelegentlich auf die hier niedergelegten Dinge verweisen, ohne sie zu wiederholen. Um so ausführlicher werde ich jetzt, gewissermaßen als Fortsetzung dieser Auseinandersetzungen, das eigentlich Mathematische, was für den Schulunterricht nur irgend in Betracht kommt,

---

[1] F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. – Weiterhin zitiert als „Klein-Schimmack".

schen Reformbestrebungen sprachen P. Wendland (Breslau) über die die Altertumswissenschaften betreffenden Fragen, Al. Brandl (Berlin) über neuere Sprachen und endlich A. Harnack (Berlin) über Geschichte und Religion; die 4 Vorträge sind in einer Broschüre[1] vereinigt erschienen, auf die ich Sie nachdrücklich hinweise. Ich halte das hiermit angebahnte gemeinsame Vorgehen unserer Wissenschaften mit den Philologen für äußerst ersprießlich, da es Zusammenhang und gegenseitiges Verständnis zwischen zwei einander sonst fremd, wenn nicht gar feindlich gegenüberstehenden Gruppen schafft. Ein solches gutes Verhältnis wollen wir stets uns zu fördern bemühen, mag auch manchmal, wenn wir unter uns sind, gelegentlich ein schärferes Wort über die Philologen fallen, was ja auch auf der Gegenseite wohl vorkommen soll. Bedenken Sie dabei stets über den Fachpartikularismus hinaus, daß gerade Sie dazu berufen sind, später an der Schule mit den Philologen zum Besten der Allgemeinheit zusammenzuwirken, und daß dazu notwendig gegenseitige Schätzung und gegenseitiges

---

1) Universität und Schule. Vorträge ... gehalten von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, A. Harnack. (Leipzig 1907).

die letzte Naturforscherversammlung in Dresden am 16. September 1907 beschäftigt, wo wir von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte aus „Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften" vorgelegt haben. Sie finden diese Vorschläge als letzten Abschnitt in dem Gesamtbericht der Kommission [1], die seit 1904 den ganzen Komplex der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfragen behandelt und jetzt ihre Tätigkeit abgeschlossen hat; ich bitte Sie sehr, sowohl von diesen Vorschlägen, als auch von den andern Teilen dieses sehr interessanten Berichtes Kenntnis zu nehmen. Kurz nach der Versammlung in Dresden fand eine ähnliche Debatte auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel am 25. September statt, wo nun freilich die mathematisch-naturwissenschaftliche Reformbewegung nur mehr als ein Glied in der Kette der parallel laufenden Bewegungen auch in philologischen Kreisen zu Worte kam. Neben einem Referate von mir über unsere mathemati-

1) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, hrsg. von A. Gutzmer (Leipzig und Berlin 1908).

den Anfänger, sondern setze voraus, daß Ihnen allen der Hauptinhalt der wichtigsten mathematischen Disciplinen bekannt ist. Ich werde vielfach von Problemen der Algebra, der Zahlentheorie, der Functionentheorie etc. zu reden haben, ohne auf Einzelheiten eingehen zu können; Sie müssen diese Dinge also schon einigermaßen kennen, wenn Sie meinen Auseinandersetzungen folgen wollen. Mein Zweck hier wird stets sein, Ihnen den <u>gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisciplinen</u> vorzuführen, der in den Specialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, sowie insbesondere ihre <u>Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik</u> zu betonen. Dadurch, so hoffe ich, wird Ihnen das sehr erleichtert werden, was ich doch als eigentliches Ziel Ihres akademischen Mathematikstudiums bezeichnen möchte: <u>daß Sie dem großen Wissensstoff, der Ihnen hier zukommt, einst in reichem Maße lebendige Anregungen für Ihren eigenen Unterricht entnehmen können.</u>

Lassen Sie mich Ihnen nun einige Dokumente vorlegen, die aus allerneuester Zeit stammend das Interesse weiter Kreise an den Fragen der Lehrerausbildung bekunden und für uns wertvolles Material bieten. Besonders haben diese Fragen auch dium ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die alte Unterrichtstradition auf, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.

Diese *doppelte Diskontinuität*, die gewiß weder der Schule noch der Universität jemals Vorteil brachte, bemüht man sich nun neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen der modernen Entwicklung der Wissenschaft und der allgemeinen Kultur angepaßten Ideen zu durchtränken sucht - wir werden noch vielfach darauf einzugehen haben - andererseits aber durch geeignete Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht. Und da scheinen mir eines der wichtigsten Hilfsmittel *zusammenfassende Vorlesungen* zu sein wie die, die ich heute vor Ihnen beginne. Ich werde mich damit keinesfalls an-

Einleitung.

Meine Herren! In den letzten Jahren hat sich unter den Universitätslehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer ein weitgehendes Interesse an einer zweckmäßigen, allen Bedürfnissen gerecht werdenden <u>Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts</u> entwickelt. Diese Erscheinung ist erst recht neuen Datums; in einer ganzen langen Zeitperiode vorher trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft ohne Rücksicht auf das, was der Schule not tat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen. Doch was ist die Folge einer solchen Praxis? Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergißt er daher alle diese Dinge rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Stu-

Anhang.

Dritter Hauptteil: Analysis.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Hauptteil: Arithmetik.

gezeichnet qualifizierte Hilfskraft erwies. Man wolle dabei von der Arbeit, die Herr Dr. Hellinger zu erledigen hatte, nicht gering denken. Denn es ist auch so noch ein weiter Weg von der durch allerlei zufällige Umstände bedingten mündlichen Darlegung des Dozenten zu der schriftlichen, hinterher noch wesentlich abgeglichenen, lesbaren Darstellung. Nur daß die Genauigkeit der Ausführungen und die Gleichmäßigkeit der Auseinandersetzungen nicht so weit getrieben wird, als es nach unseren Gewohnheiten bei der Drucklegung unerläßlich scheint.

Ich scheue etwas davor zurück, in bestimmte Aussicht zu stellen, daß nun noch weitere Fortsetzungen dieser Veröffentlichungen über den mathematischen Unterricht folgen sollen, zunächst für das Gebiet der Geometrie; — ich will vielmehr mit dem Wunsche schließen, daß sich die vorliegende Autographie als nützlich erweisen möge, indem sie manchen Lehrer an unseren höheren Schulen veranlaßt, über die zweckmäßige Darbietung des von ihm zu behandelnden Lehrstoffes in neuer Weise selbständig nachzudenken. Nur eine solche Anregung will meine Schrift geben, keinen ausgeführten Lehrgang, dessen Festlegung ich vielmehr den an der Schule wirkenden Herren durchaus überlasse. Es ist ein Mißverständnis, wenn man an einzelnen Stellen vorauszusetzen scheint, ich habe mich je in einem anderen Sinne betätigt. Insbesondere der Lehrplan der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (der sog. „Meraner" Lehrplan) ist nicht etwa von mir, sondern unter bloßer Mitwirkung meinerseits von hervorragenden Vertretern der Schulmathematik ausgearbeitet worden.

Was schließlich die Art der im folgenden eingehaltenen Darstellung betrifft, so genügt wohl, wenn ich hervorhebe, daß ich, wie bei früheren Gelegenheiten, auch hier bemüht war, überall geometrische Anschaulichkeit mit der durch die arithmetischen Formeln ermöglichten Präzision zu verbinden, und daß es mir besonderes Vergnügen gemacht hat, dem historischen Werdegang der Theorien nachzugehen, um von da aus die Besonderheiten der verschiedenartigen, im heutigen Unterricht unvermittelt nebeneinander herlaufenden Darstellungsweisen zu verstehen.

Göttingen, Ende Juni 1908. **Klein.**

Vorwort.

Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", speziell über „die Organisation des mathematischen Unterrichts" gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn Schimmack zusammen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer — oder auch dem reiferen Studenten — Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses nicht, wie etwa Weber-Wellstein tun, in Form einer systematisch geordneten Darstellung, sondern in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.

Auf das so bezeichnete Programm — das nachstehend nur erst für die Gebiete der Arithmetik, Algebra und Analysis durchgeführt wird — wurde schon in der Vorrede zu Klein-Schimmack (April 1907) hingewiesen; ich hatte damals gehofft, daß Herr Schimmack trotz mancher Hindernisse doch vielleicht die Zeit finden würde, die Bearbeitung meiner Vorträge für den Druck wieder übernehmen zu können. Aber ich habe ihn selbst sozusagen daran gehindert, indem ich seine Arbeitskraft für die uns gemeinsam interessierenden pädagogischen Fragen fortgesetzt nach anderen Seiten in Anspruch zu nehmen hatte. Jedenfalls zeigte sich bald, daß der Plan unausführbar war, falls anders die Arbeit in kurzer Zeit zu Ende geführt werden sollte, wie dies doch im Interesse einer tatsächlichen Einwirkung auf die heute im Vordergrunde stehenden Unterrichtsfragen erwünscht schien. Ich habe also wieder, wie in früheren Jahren, zu dem bequemeren Mittel der Autographierung meiner Vorträge gegriffen, zumal sich mein jetziger Assistent, Herr Dr. Ernst Hellinger, als eine hierfür aus-

ELEMENTARMATHEMATIK

VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL I: ARITHMETIK, ALGEBRA, ANALYSIS.

VORLESUNG

GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1907—08

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

LEIPZIG 1908.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER